UNIDAD DIDÁCTICA 12

Aplicaciones de las derivadas

En esta unidad didáctica trabajamos las aplicaciones de las derivadas, siendo una de las más significativas la optimización de funciones, la cual forma parte del llamado cálculo de variaciones.

En la más remota antigüedad ya se encuentran problemas de optimización. Uno de los más famosos se refiere a la princesa Dido, fundadora de Cartago, y la leyenda nos lo presenta así: *El Rey Jarbas de Numidia daría a la princesa Dido toda la tierra que ésta pudiera encerrar con una piel de buey*. Este famoso problema fue resuelto por Jacques Bernoulli (1654-1705). Se llama problema isoperimétrico, y se puede enunciar de este modo: *De entre todas las curvas cerradas de igual perímetro, encontrar aquella que encierra área máxima*. La solución es la circunferencia. Así pues, la princesa Dido hizos tiras la piel de buey y encerró una superficie circular.

Las superficies matemáticas que forman las películas de las pompas de jabón son superficies de área mínima o llamadas superficies minimales. Para determinar superficies minimales referentes a estructuras de edificios, tejados y cubiertas, etc., se utilizan como modelos las películas jabonosas.

"La pompa de jabón". Jean Baptiste Siméon (1699-1779).

ESQUEMA CONCEPTUAL

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en x_0

EXTREMOS RELATIVOS

- $f'(x_0) = 0$
  - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$
  - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$

aplicación

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

CONCAVIDAD

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y positivas en el punto $(x_0, f(x_0))$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y negativas en el punto $(x_0, f(x_0))$

PUNTOS DE INFLEXIÓN

- $f''(x_0) = 0;\ f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en el punto $(x_0, f(x_0))$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

- Teorema de Rolle
- Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado
- Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange o del valor medio

CÁLCULO DE LÍMITES

Regla de L'HÔPITAL que permite resolver todos los tipos de indeterminaciones

ACTIVIDADES INICIALES

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = x \cdot |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
2. Demuestra que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.
3. Expresa, en función de la longitud de la base, el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20 m. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?

desarrollo de contenidos

1 Crecimiento y decrecimiento de una función

Crecimiento estricto

Una función f es **estrictamente creciente en un intervalo (a, b)** si y sólo si:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

o

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Decrecimiento estricto

Una función f es **estrictamente decreciente en un intervalo (a, b)** si y sólo si:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

o

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

En la unidad didáctica 8 hemos estudiado las propiedades más características de las funciones, estando entre ellas el crecimiento y el decrecimiento que se ha revisado en el epígrafe 9.

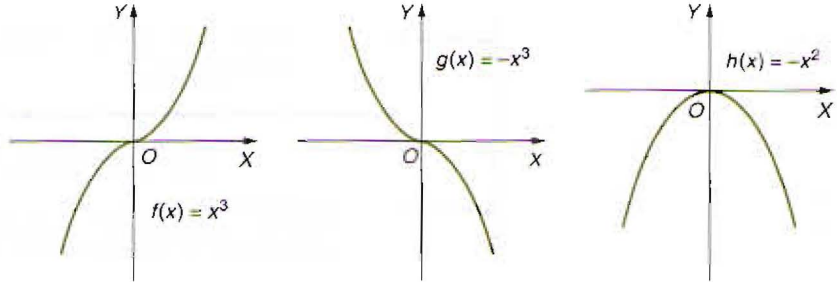
La siguiente propiedad o teorema nos muestra la relación que existe entre el crecimiento y el decrecimiento y la derivada.

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces la función f es **estrictamente creciente** en x_0.
- Si $f'(x_0) < 0$, entonces la función f es **estrictamente decreciente** en x_0.

La demostración de esta propiedad es inmediata a partir de la definición de derivada y de las definiciones de crecimiento estricto y de decrecimiento estricto.

Si la función tiene derivada nula en el punto x_0, $f'(x_0) = 0$, o tangente horizontal en x_0, no podemos afirmar nada sobre el crecimiento y decrecimiento. Puede ocurrir que f sea estrictamente creciente en x_0, estrictamente decreciente o ninguna de las dos cosas.

Las tres funciones siguientes tienen derivada nula en $x = 0$ y, sin embargo, f es estrictamente creciente en $x = 0$; la función g es estrictamente decreciente en $x = 0$ y h no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente en $x = 0$.



ACTIVIDADES RESUELTAS

1. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $h(x) = -x^2$ en los puntos $x = 2$ y $x = -2$.

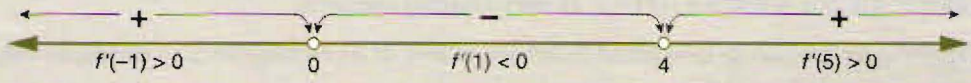
$$h'(x) = -2x \begin{cases} h'(-2) = 4 > 0 \Rightarrow h \text{ es estrictamente creciente en } x = -2 \\ h'(2) = -4 < 0 \Rightarrow h \text{ es estrictamente decreciente en } x = 2 \end{cases}$$

2. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

Para resolver este problema hallamos la derivada primera de f y estudiamos su signo:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

Para estudiar el signo de f' calculamos sus ceros, que son $x = 0$ y $x = 4$. Representamos estos valores en la recta real, quedando dividida en 3 intervalos. Estudiamos el signo de f' en cada uno de ellos:



Por tanto, f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 4)$.

2 Determinación de extremos relativos

En el epígrafe 10 Extremos relativos de la unidad didáctica 8 hemos definido los extremos relativos de una función y en la citada unidad pueden encontrarse actividades resueltas en las que hemos comprobado la existencia de extremos relativos haciendo uso de la definición.

En las funciones derivables, al menos dos veces, resulta muy sencillo la determinación de extremos relativos en base a la siguiente propiedad o teorema.

- Si una función f tiene su derivada primera nula en un punto, de abscisa x_0, y su derivada segunda en ese punto es negativa, entonces la función f presenta un **máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$**.
- Si una función f tiene su derivada primera nula en un punto, de abscisa x_0, y su derivada segunda en ese punto es positiva, entonces la función f presenta un **mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$**.

Simbólicamente:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } (x_0, f(x_0)) \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } (x_0, f(x_0)) \end{cases}$$

Demostración:

Demostramos el teorema para el caso de máximo relativo. Para probar el caso de mínimo relativo se haría de forma análoga.

Por ser $f''(x_0) < 0$ la derivada primera, f' es estrictamente decreciente en x_0. Como $f'(x_0) = 0$, entonces f' es positiva a la izquierda de x_0 o en un entorno $E^-(x_0, \delta)$ lateral a la izquierda de x_0 y f' es negativa a la derecha de x_0 o en un entorno $E^+(x_0, \delta)$ lateral a la derecha de x_0.

Por tanto, f es estrictamente creciente en $E^-(x_0, \delta)$ y es estrictamente decreciente en $E^+(x_0, \delta)$, luego en un entorno reducido $E^*(x_0, \delta)$ de x_0, el mayor valor que toma la función es $f(x_0)$, por lo que f tiene un máximo relativo en $(x_0, f(x_0))$.

Cuando se anulan las primeras derivadas, existe extremo relativo si la primera derivada no nula es de orden par.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

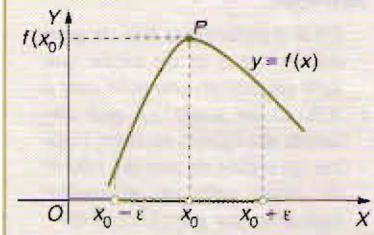
$f^{(n)}(x_0) < 0$; n par $\Downarrow$ f tiene máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$

$f^{(n)}(x_0) > 0$; n par $\Downarrow$ f tiene mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$

Máximo relativo

Una función f tiene un **máximo relativo en un punto de abscisa x_0** si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, tal que para todo x que pertenece al entorno reducido $E^*(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) - \{x_0\}$ se verifica que:

$$f(x) < f(x_0)$$



Si una función f cumple:

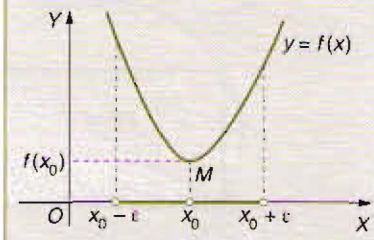
$$f'(x_0) = 0; \quad f''(x_0) < 0$$

entonces tiene un **máximo relativo en un punto de abscisa x_0**.

Mínimo relativo

Una función f tiene un **mínimo relativo en un punto de abscisa x_0** si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, tal que para todo x que pertenece al entorno reducido $E^*(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) - \{x_0\}$ se verifica que:

$$f(x) > f(x_0)$$



Si una función f cumple:

$$f'(x_0) = 0; \quad f''(x_0) > 0$$

entonces tiene un **mínimo relativo en un punto de abscisa x_0**.

3 Optimización de funciones

Frans van Schooten (1615-1660), matemático holandés, sucedió a su padre como profesor de Matemáticas en Leyden. Fue un gran conocedor de la Geometría de Descartes y tradujo al latín la obra titulada *La Geometría a Renato Descartes*, por lo que, aunque la Geometría Analítica fue obra de Descartes, quien la dio a conocer fue Van Schooten.

Resolvió, por métodos geométricos, un interesante problema de optimización, llamado ***problema de Van Schooten***.

En una pinacoteca hay un gran cuadro de 3 m de altura que está situado en una gran sala a 2,30 m del suelo. ¿A qué distancia del cuadro se debe colocar un crítico de arte de 1,80 m de altura para ver el cuadro bajo el mayor ángulo posible?

En muchas situaciones sociales, políticas, económicas, tecnológicas, físicas, médicas, matemáticas, etc., se plantean problemas sobre **optimización de funciones**. Así, por ejemplo, en Economía se estudia cómo conseguir las empresas máximos beneficios con mínimos costes.

En Física, en muchas situaciones, interesa conocer el instante en que un cohete alcanza su máxima velocidad.

En Matemáticas son numerosas las situaciones de optimización de funciones; por ejemplo, la determinación de la distancia a la que debemos colocarnos delante de un cuadro para verlo con el mayor ángulo posible (problema de van Schooten).

Los casos más sencillos de optimización de funciones son aquellos en los que la función a optimizar depende de una sola variable.

Optimización de funciones de una variable:

1. Expresar la función que deseamos optimizar.
2. Si la función tiene más de una variable, relacionar las variables con los datos del enunciado para conseguir una función de una variable.
3. Obtener los máximos y los mínimos de la función.
4. Comprobar que los resultados obtenidos tienen sentido y se adecuan a las condiciones del enunciado.

ACTIVIDADES RESUELTAS

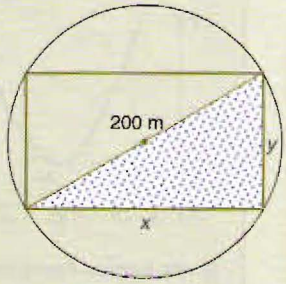
1. Entre los números, cuya suma es 36, encuentra aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

- Denotamos por x y $36 - x$ los números que hemos de buscar. Luego, la función a optimizar es $S(x) = x^2 + (36 - x)^2 = 2x^2 - 72x + 1\,296$.
- Optimizamos esta función: $S'(x) = 4x - 72$; $4x - 72 = 0 \Rightarrow x = 18$; $S''(x) = 4$

  Luego, se obtiene: $S'(18) = 0$; $S''(18) > 0 \Rightarrow$ En $x = 18$, la función S presenta un mínimo.

  Por tanto, los números buscados son: $x = 18$; $36 - x = 18$

2. Halla las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que se puede inscribir en un terreno circular de 100 m de radio.



- La función a optimizar es $A = x \cdot y$, que expresada en función de una sola variable, se obtiene:

$$y = \sqrt{40\,000 - x^2} \Rightarrow A(x) = \sqrt{40\,000\,x^2 - x^4}$$

- Optimizamos esta función:

$$A'(x) = \frac{40\,000 - 2x^2}{\sqrt{40\,000 - x^2}};\ A'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 100\sqrt{2}$$

$$A''(100\sqrt{2}) < 0$$

La función presenta un máximo en $x = 100\sqrt{2}$m, $y = 100\sqrt{2}$m. Por lo que el rectángulo de mayor área es un cuadrado.

El caso $x = -100\sqrt{2}$ no tiene sentido en el contexto del problema.

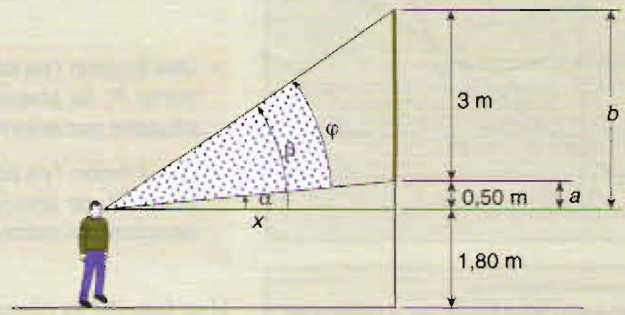
3. Problema de Van Schooten

- El dibujo adjunto ilustra la situación que plantea el problema. Debemos hacer máximo el ángulo φ, para lo cual obtenemos la función a optimizar.

$$tg\,\varphi = tg\,(\beta - \alpha) = \frac{tg\,\beta - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{(b-a)\,x}{x^2 + ab}$$

$$\varphi = arc\,tg\left[\frac{(b-a)x}{x^2 + ab}\right]$$



- Optimizamos la función φ:

$$\varphi'(x) = \frac{(b-a)\,(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2 + (b-a)^2\,x^2};\ \varphi'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot b};\ x = -\sqrt{a \cdot b}$$

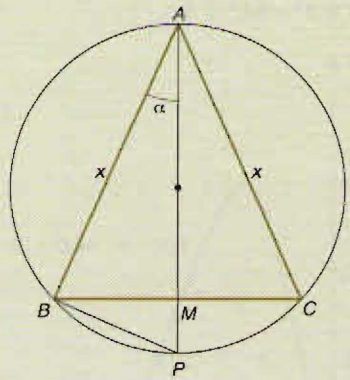
$$\varphi''(\sqrt{a \cdot b}) < 0$$

Por lo cual la distancia a la que nos debemos colocar es $x = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{0{,}5 \cdot 3{,}5} = 1{,}22$ m. A esta distancia, el ángulo φ bajo el cual vemos el cuadro es máximo.

El valor $x = -\sqrt{a \cdot b} = -1{,}22$ m no tiene sentido en el contexto que se plantea el problema.

4. Inscribimos un triángulo isósceles en una circunferencia de radio *R*. Determina las dimensiones del triángulo de área máxima.

- La función a optimizar es el área del triángulo isósceles ABC: $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot MA}{2}$
- Expresamos la función A dependiendo sólo de la variable x:



El triángulo ABM es semejante al triángulo ABP por ser rectángulos y tener el ángulo α igual, luego:

$$\frac{x}{2R} = \frac{MA}{x} \Rightarrow MA = \frac{x^2}{2R}\ [\text{I}]$$

$$BC = 2 \cdot BM = 2\sqrt{x^2 - MA^2} = \frac{x\sqrt{4R^2 - x^2}}{R}\ [\text{II}]$$

Llevando [I] y [II] a la función A, obtenemos:

$$A(x) = \frac{\sqrt{4R^2x^6 - x^8}}{4R^2}$$

- Optimizamos esta función:

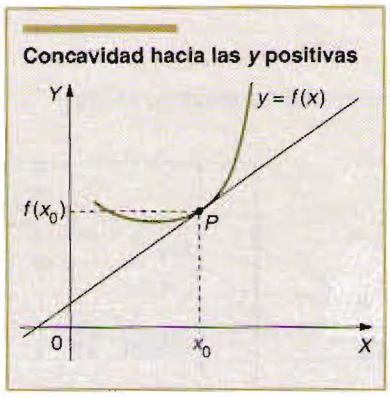
$$A'(x) = \frac{x^5(3R^2 - x^2)}{R^2\sqrt{4R^2x^6 - x^8}};\ A'(x) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \sqrt{3}R;\ x = -\sqrt{3}R$$

$$A''\,(\sqrt{3} \cdot R) < 0$$

Por tanto, el triángulo de área máxima tiene de dimensiones $x = \sqrt{3}R$ m, $BC = \sqrt{3}R$ m y se trata de un triángulo equilátero.

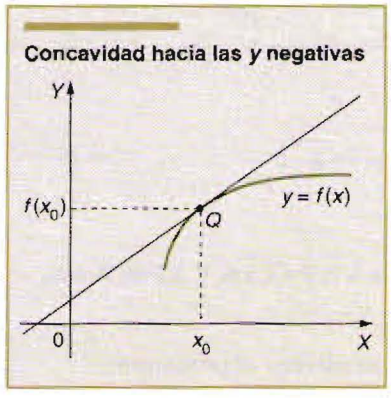
Los valores $x = 0$ y $x = -\sqrt{3}\,R$ carecen de sentido en el problema.

4 Concavidad o curvatura de una función



La posición de los puntos de una curva, próximos al punto de abscisa x_0, respecto de la tangente a la curva en x_0, nos muestra si la concavidad de la curva es hacia arriba o hacia abajo.

- Una función f es **cóncava hacia las y positivas** o cóncava hacia arriba en un punto P, de abscisa x_0, si todos los puntos de la curva próximos a P están situados por encima de la recta tangente a P.
- Una función f es **cóncava hacia las y negativas** o cóncava hacia abajo en un punto Q, de abscisa x_0, si todos los puntos de la curva próximos a Q están situados por debajo de la recta tangente a Q.



Una función es cóncava hacia las y positivas o hacia las y negativas en un intervalo (a, b) cuando lo es en todos y cada uno de sus puntos.

Cuando la función f admite, al menos, derivada segunda, podemos estudiar el tipo de concavidad de la misma mediante la siguiente propiedad o teorema.

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces f es **cóncava hacia las y positivas** en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f''(x_0) < 0$, entonces f es **cóncava hacia las y negativas** en el punto $(x_0, f(x_0))$.

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Estudia el tipo de concavidad que presenta la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Para resolver este problema hallamos la derivada segunda de f y estudiamos su signo:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

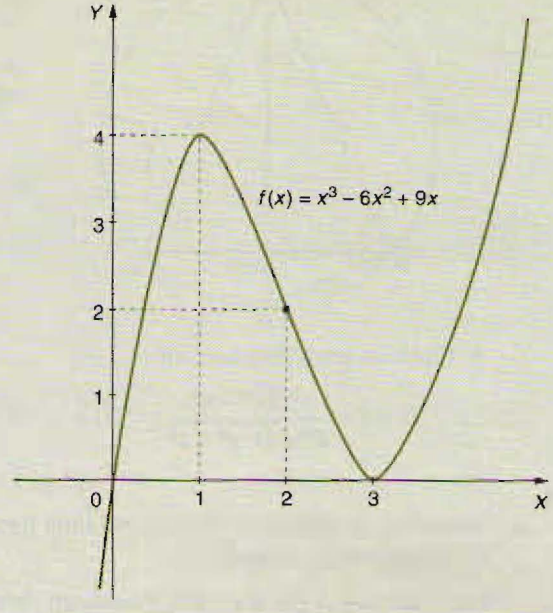
$$f''(x) = 6x - 12$$

- $f''(x) = 6x - 12 > 0 \Rightarrow x > 2$
- $f''(x) = 6x - 12 < 0 \Rightarrow x < 2$

Por tanto, f es cóncava hacia las y positivas en el intervalo $(2, +\infty)$ y f es cóncava hacia las y negativas en el intervalo $(-\infty, 2)$.

En $x = 2$, la función f no es cóncava hacia las y positivas ni cóncava hacia las y negativas.

En la gráfica de la función podemos observar los resultados que hemos determinado sobre el tipo de concavidad.

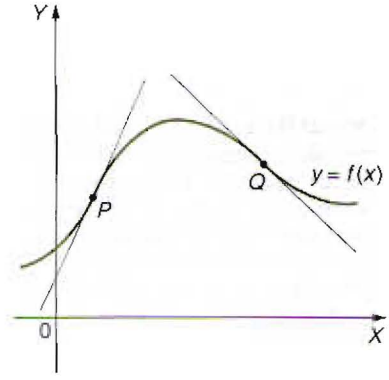


5 Puntos de inflexión

En la gráfica de la función f observamos que, a la izquierda del punto P, la función es cóncava hacia arriba y, a la derecha del punto P, es cóncava hacia abajo. En P cambia la función el sentido de la concavidad.

A la izquierda del punto Q, la función es cóncava hacia abajo y, a la derecha del punto Q, f es cóncava hacia arriba. En Q, la función cambia también el sentido de la concavidad.

A los puntos, como P y Q, donde la función cambia el sentido de la concavidad, se les llama puntos de inflexión.



Una función f tiene un **punto de inflexión** en un punto cuando en este punto cambia el sentido de la concavidad.

En las funciones derivables, al menos tres veces, resulta muy sencillo la determinación de los puntos de inflexión haciendo uso del siguiente teorema.

Si una función f tiene su derivada segunda nula en un punto de abscisa x_0 y su derivada tercera en ese punto es distinta de cero, entonces la función f tiene un **punto de inflexión en el punto $(x_0, f(x_0))$**.

Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } (x_0, f(x_0))$$

Tangente y punto de inflexión

De la definición de punto de inflexión se deduce que en él la tangente atraviesa la curva.

Cuando se anulan la segunda derivada, la tercera derivada, etc., en x_0, siendo el orden de la primera derivada no nula impar, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = x_0$.

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0;\ f^{(n)}(x_0) \neq 0;\ n \text{ impar}$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ tiene un punto de inflexión en } (x_0, f(x_0))$$

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Determina los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad g(x) = x^5 - 2$$

- Puntos de inflexión de la función f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12 \qquad f'''(x) = 6$$

$$6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2;\ f''(2) = 0 \text{ y } f'''(2) = 6 \neq 0$$

Luego, f tiene un punto de inflexión en $(2, f(2)) = (2, 2)$.

- Puntos de inflexión de la función g:

$$g'(x) = 5x^4;\ g''(x) = 20x^3;\ g'''(x) = 60x^2;\ g^{(4)}(x) = 120x;\ g^{(5)}(x) = 120$$

$$g''(0) = g'''(0) = g^{(4)}(0) = 0 \text{ y } g^{(5)}(0) = 120 \neq 0$$

Luego, g tiene un punto de inflexión en $(0, g(0)) = (0, -2)$.

6 Propiedades de las funciones derivables

Como ya hicimos con las funciones continuas vamos a mostrar unos importantes resultados asociados a las funciones derivables.

■ Teorema de Rolle

Michel Rolle(1652-1719) fue un matemático francés que formaba parte de un grupo de matemáticos que estaban en contra de los nuevos métodos infinitesimales defendidos por el marqués de L'Hôpital en su obra *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.*

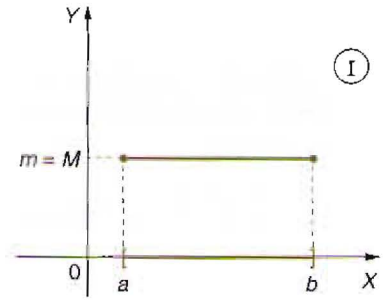
El resultado conocido como teorema de Rolle aparece en un texto de Geometría y Álgebra llamado *Methode pour résoudre les égalitéz* publicado en 1691.

Las paradojas que proporciona la historia hacen que Rolle figure junto a los creadores del cálculo infinitesimal cuando fue un detractor de estos procedimientos.

Si una función f es continua en intervalo cerrado $[a,b]$, es derivable en el intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al abierto (a,b) de modo que la derivada en él se anula, $f'(c) = 0$.

Demostración.

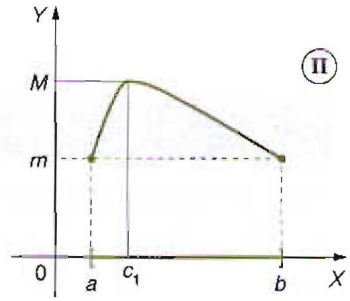
Por ser f continua de intervalo $[a,b]$ y por el teorema de Weierstrass por lo menos hay dos puntos c_1 y c_2 en los cuales la función alcanza el máximo absoluto M y el mínimo absoluto m.

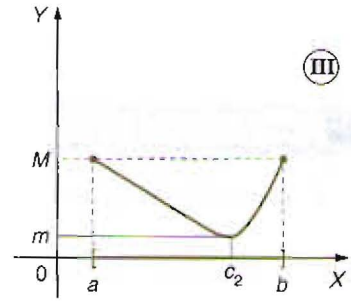


Esto puede ocurrir de tres maneras distintas.

- En el caso I, se tiene que coinciden $M = m = f(a) = f(b)$ y, por tanto, la función f es una constante, por lo que $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ y estaría probado el teorema.

- En los casos II y III, uno por lo menos de los valores c_1 y c_2 debe ser interior al intervalo (a,b), con lo que el máximo o el mínimo absolutos son relativos y, por tanto, la primera derivada en este punto es nula, con lo que quedaría probado el teorema.



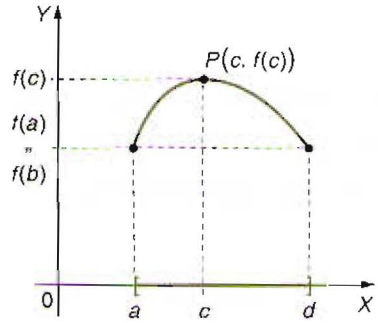


Una aplicación importante del teorema de Rolle

La conjunción de los teoremas de Bolzano y de Rolle nos permite detectar intervalos donde la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una solución.

Para ellos debe tenerse en cuenta el siguiente resultado:

Entre cada dos raíces de una función, derivable, existe al menos una raíz de la función derivada.



Geométricamente este teorema asegura la existencia de un punto c interior del intervalo (a,b) de forma que la recta tangente en el punto $P(c, f(c))$ a la curva $y = f(x)$ es paralela al eje de abscisas, por tener pendiente igual a cero.

ACTIVIDADES RESUELTAS

1. Comprueba si se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = sen\ x + cos\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

La función $f(x) = sen\ x + cos\ x$ cumple las tres hipótesis del teorema de Rolle, a saber:

- $f(0) = 1$ y $f(2\pi) = 1$
- f es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 2\pi]$, al serlo las funciones seno y coseno.
- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$. La función es derivable en todos los puntos del intervalo $(0, 2\pi)$.

El teorema de Rolle nos asegura que existe algún $c \in (0, 2\pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Es decir, el valor c es la solución o soluciones de la ecuación $cos\ x - sen\ x = 0$ o $sen\ x = cos\ x$.

En este caso para $c = \frac{\pi}{4} \in (0, 2\pi)$ se obtiene $sen\ \frac{\pi}{4} = cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Halla el valor k para que satisfaga el teorema de Rolle la función $f(x) = kx + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ tg\ x$ en el intervalo cerrado $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

La función dada $f(x) = kx + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ tg\ x$ debe cumplir.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ tg\frac{\pi}{6} = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\ tg\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

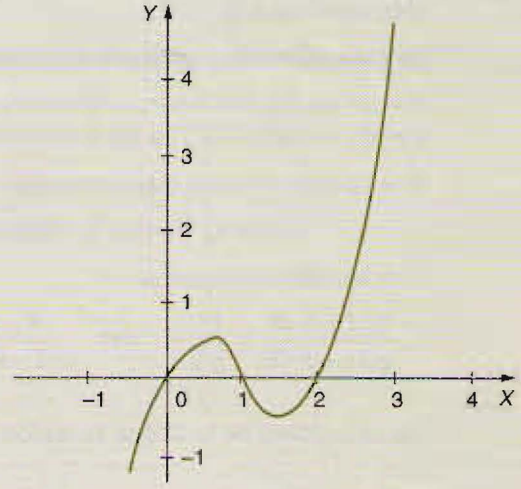
$$\Leftrightarrow \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sqrt{3} \Leftrightarrow k = -2$$

Para $k = -2$ se cumplen las hipótesis de teorema de Rolle y, por tanto, la tesis.

3. Prueba que la función $f(x) = |x+1|$ no verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 0]$. Justifica el motivo.

La función $f(x) = |x + 1|$ es continua en todos los puntos del intervalo $[-2, 0]$. Además, $f(-2) = f(0) = 1$.

Sin embargo, la función no es derivable en -1, ya que $f'(-1^-) = -1$ y $f'(-1^+) = 1$.



4. Para la función $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ prueba que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene dos raíces reales, sin calcular explícitamente la raíces.

Podemos utilizar el teorema de Rolle en los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$.

La función dada es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$; entonces existe un valor $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 0$.

De igual forma, como $f(1) = 0$ y $f(2) = 0$, existe $c_2 \in (1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.

Todo ello puede verse en la gráfica adjunta.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés, considerado como el primer matemático que exigió el rigor en los descubrimientos y en la aplicación de cálculo infinitesimal.

A él se debe el cálculo infinitesimal en variable compleja que abrió un nuevo dominio a las Matemáticas.

Debido a la abundancia de sus trabajos son numerosos los teoremas, criterios y nociones diversas que llevan su nombre.

■ Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivables en el intervalo abierto (a,b) y tales que $g(a) \neq g(b)$. Entonces existe, al menos un punto c perteneciente al intervalo (a,b) de modo que en él se verifica:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demostración:

Definimos la función siguiente:

$$h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

Esta función verifica las hipótesis de teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$, es decir:

- h es continua en $[a,b]$ al serlo las funciones f y g.
- h es derivable en (a,b) al serlo las funciones f y g.
- Es fácil ver que $h(a) = h(b)$.

Por lo tanto existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, con lo cual:

$$h'(c) = 0 \Rightarrow 0 = f'(c)\,[g(b) - g(a)] - g'(c)\,[f(b) - f(a)]$$

Operando en esta última expresión, se obtiene la conclusión del teorema:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ACTIVIDAD RESUELTA

1. ¿Se puede aplicar el teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3 - 2x - 1$ en el intervalo $[-2, 1]$?

En caso afirmativo, aplicarlo determinando el punto en que se verifica.

Por ser las dos funciones continuas y derivables en toda la recta real, en particular lo son en el intervalo cerrado $[-2, 1]$ y en el abierto $(-2, 1)$ y $g(-2) \neq g(1)$ si es aplicable teorema de Cauchy.

Para aplicarlo vemos que se cumple:

$$f(1) = 4, \quad f(-2) = 1, \quad g(1) = -2, \quad g(-2) = -5, \quad f'(x) = 2x + 2 \text{ y } g'(x) = 3x^2 - 2$$

Con los datos anteriores:

$$\frac{f(1) - f(-2)}{g(1) - g(-2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \iff \frac{4 - 1}{-2 - (-5)} = \frac{2c + 2}{3c^2 - 2} \iff 1 = \frac{2c + 2}{3c^2 - 2} \iff 3c^2 - 2c - 4 = 0$$

Las soluciones de la última ecuación son: $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{3} = -0{,}86$ y $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2} = 1{,}53$.

La primera nos vale para comprobar que el teorema se verifica pues $\dfrac{1 - \sqrt{13}}{3} \in (-2, 1)$.

■ Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange o del valor medio

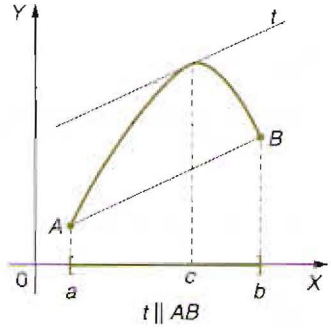
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo abierto (a,b) de modo que en él se verifica:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración.

La demostración es trivial, pues se trata de una consecuencia inmediata del teorema de Cauchy sin más que considerar la función $g(x) = x$.

Geométricamente significa que existe, por lo menos, un punto c interior el intervalo (a,b) de manera que la tangente en el punto de la curva $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



$t \parallel AB$

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), astrónomo y matemático franco-italiano.

Comenzó su actividad docente como profesor de Matemáticas en la Escuela de Artillería de Turín a los 16 años. Posteriormente, se trasladó a Berlín, donde fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias, a propuesta de Euler.

A la muerte del rey Federico II, en el año 1786, se trasladó a París, donde también fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias.

Publicó numerosas obras sobre cálculo infinitesimal y teoría de funciones. Son varios los teoremas y otros resultados con su nombre, en particular un célebre método de interpolación.

ACTIVIDADES RESUELTAS

1. Encuentra un punto de la parábola $f(x) = 3x^2$, donde la tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 27)$.

La función $f(x) = 3x^2$ es continua en toda la recta real, en particular lo es en el intervalo cerrado $[0,3]$ y derivable en el abierto $(0,3)$.

Aplicamos el teorema de Lagrange y obtenemos:

$$f(0) = 0, \quad f(3) = 27, \quad f'(x) = 6x \Rightarrow \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{27 - 0}{3} = 6c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

El punto solución tiene de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$.

2. Estudia si se puede aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en el intervalo $[1, 3]$ y hallar el valor que da el teorema.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ es continua en } [1, 3] \\ \bullet\ f \text{ es derivable en } (1, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (1, 3) \mid f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow 2c - 2 = \frac{6 - 2}{3 - 1}$$

El valor c al que se refiere el teorema es $c = 2 \in (1, 3)$.

Johann Bernoulli (1667-1748) obtuvo la titulación en Medicina en 1690. Fue instruido por su hermano Jakob en el cálculo infinitesimal de Leibniz.

En París fue profesor particular del francés marqués de L'Hôspital o L'Hôpital, al cual le enseñó el cálculo infinitesimal y sus propios descubrimientos en ese campo.

En 1696, L'Hôspital publicó un tratado de cálculo diferencial titulado *Analyse des infiniment petits* (Análisis de las cantidades infinitamente pequeñas) en el cual figuraba la regla de L'Hôpital.

En 1704, tras la muerte del marqués, Bernoulli reivindicaría como propia la célebre regla. La historia de las Matemáticas ha conservado esta regla con el nombre de regla de L'Hôpital.

Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704).

7 Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites

En la unidad didáctica 9 vimos algunos procedimientos para resolver los distintos tipos de indeterminaciones, excluidos los tipos o casos 0^0 y ∞^0.

CASOS DE INDETERMINACIONES						
$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞

En esta unidad didáctica estamos en condiciones de resolver todos los tipos de indeterminaciones incluidos los casos 0^0 y ∞^0 haciendo uso de las derivadas, mediante la regla de Bernoulli-L'Hôpital, más conocida como regla de L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital. Caso $\frac{0}{0}$

Sean f y g dos funciones continuas que verifican las siguientes hipótesis:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
- En un cierto entorno reducido de x_0, $g(x) \neq 0$
- Existen $f'(x)$ y $g'(x)$, que ni son cero ni infinito a la vez, en un entorno de x_0
- Existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ finito o infinito

Entonces se tienen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para cuando x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

A veces ocurre que en $x = x_0$ se anulan las funciones $f(x)$ y $g(x)$; así como las primeras derivadas, segundas, ..., $(n-1)$-ésimas, y existen $f^{(n)}(x_0)$ y $g^{(n)}(x_0)$. En este caso se aplica la regla de L'Hôpital generalizada, que equivale a aplicar la regla de L'Hôpital reiteradamente.

Regla de L'Hôpital generalizada

Si cuando x tiende a x_0 se anulan $f(x)$, $g(x)$ y sus respectivas derivadas primeras, segundas, ..., $(n-1)$-ésimas, y existen $f^{(n)}(x_0)$ y $g^{(n)}(x_0)$, que ni son cero ni infinitas a la vez, entonces se verifica:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Esta regla es válida para cuando x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

- **Caso $\frac{\infty}{\infty}$**

La regla de L'Hôpital y la regla de L'Hôpital generalizada son también aplicables cuando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

- **Caso $0 \cdot \infty$**

Este caso se resuelve por la regla de L'Hôpital una vez transformado el límite correspondiente en uno del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] \; (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \; \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Calcula los límites que se indican a continuación:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \; \left(\frac{0}{0}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{x - \text{sen } x} \; \left(\frac{0}{0}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital generalizado}} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} \; \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{12x}{\text{sen } x} \; \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{12}{\cos x} = 12$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

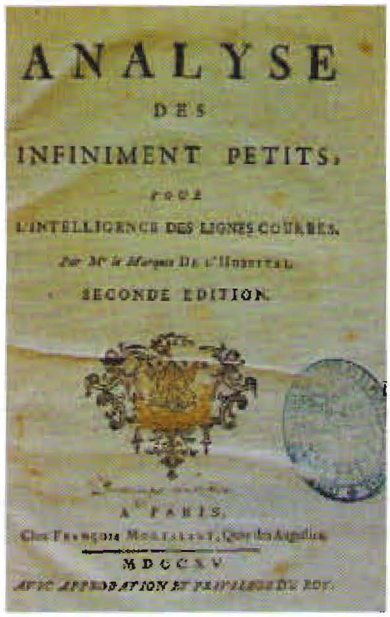
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 1}{e^{2x}} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital generalizado}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2e^{2x}} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{4e^{2x}} = 0$

- $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x \; (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{tg } x \; (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg } x}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} =$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x} \; \left(\frac{0}{0}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital generalizado}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{-2 \text{ sen } x \cos x} \; \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = -1$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x + 4} - 2} \; \left(\frac{0}{0}\right) \; \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 1}{\frac{1}{2\sqrt{x + 4}}} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
MDCCXV

Portada de la traducción al castellano del tratado del Marqués de l'Hôpital.

- **Caso $\infty - \infty$**

Dividiendo numerador y denominador por $f(x) \cdot g(x)$, la indeterminación se transforma en una del caso $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] \; (\infty \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \; \left(\frac{0}{0}\right)$$

- **Caso 0^0, ∞^0, 1^∞**

Estas indeterminaciones aparecen en límites de la forma:

$$M = \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}$$

y se resuelven tomando logaritmos neperianos:

$$\ln M = \ln \left\{ \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} \right\}$$

$$\ln M = \lim_{x \to x_0} \left[g(x) \cdot \ln [f(x)] \right] = \lambda$$

Al calcular el límite, nos aparece una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$, que ya sabemos resolver. Por tanto, el límite buscado es:

$$\ln M = \lambda \Rightarrow M = e^{\lambda} = \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

1. Calcula los límites que se indican a continuación:

- $$\lim_{x \to 1^+} \left[\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x} \right] (\infty - \infty) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x \ln x - 3x + 3}{(x-1) \ln x} \left(\frac{0}{0}\right) \boxed{\text{L'Hôpital}}$$

En muchos casos como este, la indeterminación del caso $\infty - \infty$ se transforma en la del tipo $\frac{0}{0}$ sin más que operar convenientemente, no siendo necesario usar la transformación que hemos indicado arriba.

$$\lim_{x \to 1^+} \left[\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x} \right] = \lim_{x \to 1^+} \frac{2 \ln x + \dfrac{2x}{x} - 3}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right] (\infty - \infty) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \left(\frac{0}{0}\right) \boxed{\text{L'Hôpital generalizado}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = -\frac{0}{2} = 0$$

2. Calcula los límites que se indican a continuación:

- $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Este límite pertenece al caso 1^{∞}. Para resolver esta indeterminación tomamos logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \Rightarrow \ln M = \ln\left\{\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\right\} = \lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{1-x} \cdot \ln x\right]$$

Este límite pertenece al caso $0 \cdot \infty$ y, operando convenientemente, lo transformamos en el caso $\frac{0}{0}$

$$\ln M = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x} \left(\frac{0}{0}\right) \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} = -1$$

Luego el límite pedido vale: $\ln M = -1 \Rightarrow M = e^{-1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$

- $\lim\limits_{x \to 0} [\operatorname{sen} x]^x$

Operando de forma análoga a la anterior, se tiene:

$$M = \lim_{x \to 0} [\operatorname{sen} x]^x \left(0^0\right) \; ; \; \ln M = \ln\left[\lim_{x \to 0} [\operatorname{sen} x]^x\right] = \lim_{x \to 0} [x \cdot \ln \operatorname{sen} x] \left(0 \cdot \infty\right)$$

$$\ln M = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x / \operatorname{sen} x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{0}{0}\right) \boxed{\text{L'Hôpital}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Por tanto, el límite pedido vale: $\ln M = 0 \Rightarrow M = e^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} [\operatorname{sen} x]^x = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [2^x - 1]^{\frac{2}{x+1}}$

Operando como lo hemos hecho anteriormente, tenemos:

$$M = \lim_{x \to +\infty} [2^x - 1]^{\frac{2}{x+1}} \left(\infty^0\right); \; \ln M = \ln \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{2}{x+1} \cdot \ln(2^x - 1)\right] = \left(0 \cdot \infty\right)$$

$$\ln M = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \ln(2^x - 1)}{} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \boxed{\text{L'Hôpital generalizado}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{2^x \cdot \ln 2}{2^x - 1}}{1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{2^x - 1} = \left(\infty \backslash \infty\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot 2^x \cdot (\ln 2)^2}{2^x \cdot \ln 2} = \lim_{x \to +\infty} 2 \ln 2 = \ln 4$$

Por tanto, el límite pedido vale: $\ln M = \ln 4 \Rightarrow M = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [2^x - 1]^{\frac{2}{x+1}} = 4$

Actividades resueltas de pruebas de acceso a la universidad

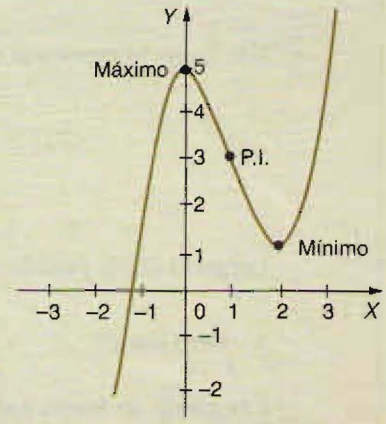
1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando $x = 2$.

Encuentra, en este caso, todos los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión.

Si $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, se tiene que $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ y $f''(x) = 6x + 2a$.

Si para $x = 2$ hay extremo relativo, entonces debe cumplirse:

$$f'(2) = 0 \iff 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \iff a = -3$$



Con el valor de a obtenido, la función y las primeras derivadas son:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6x - 6$$

Se tiene $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ para $x = 0$ y $x = 2$.

- Para $x = 0$, $f''(0) = -6 < 0$; en $(0, 5)$ hay que máximo relativo.
- Para $x = 2$, $f''(2) = 6 > 0$; en $(2, 1)$ hay un mínimo relativo.

Además $f''(x) = 6x - 6 = 0$ para $x = 1$.

- Para $x = 1$, $f'''(1) = 6 \neq 0$; en $(1, 3)$ hay un punto de inflexión.

Estudiando el signo de la primera derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, obtenemos:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, región donde se produce el crecimiento.
- $f'(x) < 0$ en $(0, 2)$, intervalo de decrecimiento de la función.

Todo lo anterior puede verse en el dibujo de la gráfica de la función.

2. Demuestra que $\forall x > 1$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

Para probar la desigualdad, estudiamos la monotonía de la función:

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$$

Esta función es estrictamente creciente $\forall x > 1$, pues para estos valores $f'(x)$ es positiva. Por ser f estrictamente creciente para cualquier $x > 1$:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0 \Rightarrow \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

con lo cual queda probada la desigualdad.

3. De una función, f, se sabe que es derivable en todos los puntos de la recta real y que su derivada verifica $f'(x) \geq 3$ para todo x. Además $f(1) = 1$. ¿Hay suficientes datos para asegurar que $f(21) \geq 61$? Razonar la respuesta.

Como la función f es derivable en todos los puntos de la recta real, también es continua, luego cumple las hipótesis del teorema de los incrementos finitos o de Lagrange en el intervalo [1, 21]:

- f es continua en [1, 21]
- f es derivable en (1, 21)

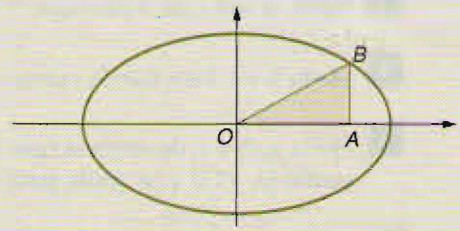
Entonces podemos afirmar que existe un número $c \in (1, 21)$ tal que cumple:

$$\frac{f(21) - f(1)}{21 - 1} = f'(c) \iff f(21) - f(1) = 20 \cdot f'(c) \iff f(21) = 1 + 20\, f'(c)$$

En el enunciado se afirma que $f'(c) \geq 3$, luego $20\, f'(c) \geq 60$.

Obtenemos: $f(21) = 1 + 20\, f'(c) \geq 1 + 60$; por tanto, $f(21) \geq 61$.

4. Sea el triángulo rectángulo, en $\mathbb{R}^2$, de vértices $O(0, 0)$; $A(x, 0)$ y $B(x, y)$, $x > 0$ e $y > 0$ estando el vértice (x, y) sobre la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 2$ tal como indica la figura. Calcula cuál ha de ser el vértice (x, y) para que el triángulo rectángulo tenga área máxima.



- La función a optimizar es $A = \frac{1}{2} x \cdot y$. Utilizando la relación $x^2 + 2y^2 = 2$, obtenemos la función expresada mediante una sola variable:

$$x = \sqrt{2 - 2y^2} \Rightarrow A = \frac{y\sqrt{2 - 2y^2}}{2} = \frac{\sqrt{2y^2 - 2y^4}}{2}$$

- Optimizamos esta función:

$$A'(y) = \frac{4y - 8y^3}{4\sqrt{2y^2 - 2y^4}} = \frac{4y(1 - 2y^2)}{4y\sqrt{2 - 2y^2}} = \frac{1 - 2y^2}{\sqrt{2 - 2y^2}}; \quad A'(y) = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sólo consideramos $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pues y ha de ser positiva.

$$A''(y) = \frac{-4y\sqrt{2 - 2y^2} - \frac{[-4y(1 - 2y^2)]}{2\sqrt{2 - 2y^2}}}{\left[\sqrt{2 - 2y^2}\right]^2} = \frac{4y^3 - 6y}{(2 - 2y^2)\sqrt{2 - 2y^2}}; \qquad \bullet\ A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$$

Por ser $A'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ y $A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$, la función $A(y)$ presenta un máximo para $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; por tanto, el vértice (x, y) pedido es:

$$(x, y) = (\sqrt{2 - 2y^2}, y) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

1 Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - x^2$ b) $g(x) = -5x + 3$ c) $h(x) = \frac{2}{x}$ d) $s(x) = e^{3x}$

e) $l(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ f) $p(x) = \frac{x-3}{x+3}$ g) $q(x) = 2^{-x}$ h) $v(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2 Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ b) $y = x(x-1)^2$ c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$

d) $y = \frac{x}{\ln x}$ e) $y = \frac{2}{1+x^2}$ f) $y = \frac{8x}{x^2+2}$

g) $y = \frac{x^2+1}{x}$ h) $y = x \cdot \ln x$ i) $y = x^2 \cdot e^x$

3 Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor -1.

4 Halla b y c para que la curva $y = -x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$.

5 Halla a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto $(6, -12)$ y se anule para $x = 8$.

6 Si una función continua tiene un máximo y un mínimo relativos, ¿puede ser el valor del mínimo mayor que el valor correspondiente al máximo?

7 Demuestra que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene siempre extremo relativo en su vértice, siendo máximo si a es negativo y mínimo si a es positivo.

8 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.

9 Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ b) $f(x) = \frac{2}{x}$ c) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ e) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ f) $f(x) = \ln(x + 4)$

10 Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = sen\ 2x$$

11 Halla el valor de k que hace que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un extremo relativo único. ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?

12 Dada la función $f(x) = x(x-1)^3$:

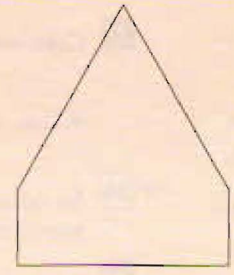
a) Estudia su monotonía. b) Halla sus extremos relativos.

c) Estudia el tipo de concavidad. d) Determina, si existen, los puntos de inflexión.

13 Descomponer el número 48 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

14 Halla el número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima.

15 Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.



16 Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

17 De todos los rectángulos de diagonal igual a 1, halla las dimensiones del de área máxima.

18 Se quieren construir botes de enlatar de forma cilíndrica con 10 litros de capacidad. Calcula sus dimensiones si se desea que el gasto de material sea mínimo.

19 Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro.
Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

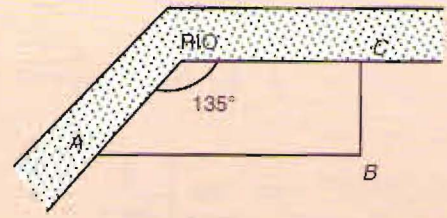
20 Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m^3, su altura 1 m y el coste de construcción por m^2 es de 30 euros para la base, 35 euros para la tapa y 20 euros para cada pared lateral.

21 Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén, razonadamente, las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

22 Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.

23 En un jardín existe un paseo cerrado que consta de media circunferencia de radio 10 cm y de su diámetro correspondiente. En el interior de la figura anterior se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. El parterre se plantará de camelias, que ocupan 0,25 m^2 cada una. ¿Cuáles el número máximo de plantas que pueden ubicarse?

24 Se desea construir un jardín, limitado en dos lados por un río que forma un codo de 135° y los otros dos lados por una valla *ABC* de 1,2 km de longitud. Halla las dimensiones del jardín de área máxima.



25 Comprueba que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$.

26 Estudia la derivabilidad de la función $1 - \sqrt[3]{x^2}$ y analiza si la función verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$

27 Consideramos la función $f(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^7 sen^3 x$. Prueba que existe, al menos, un número real x_0, con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ tal que $f'(x_0) = 0$.

28 Se considera la función $f(x) = x^{2/3}$ ¿Existe un intervalo $[a, b]$ en el que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$? Justifica la respuesta.

29 Consideramos la función f definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a, b y c para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en dicho intervalo. Halla el valor o los valores de x a los que se refiere el teorema.

30 Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad -2 \le x \le -1 \\ (x^2 - 3)/2 & \text{si} \quad -1 < x \le 0 \end{cases}$

a) Prueba que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-2, 0]$.

b) Determina los puntos cuya existencia afirma dicho teorema.

31 Determina, si es posible, a y b para que el teorema de Lagrange sea aplicable a la función:

$$f(x) = \begin{cases} a/x & \text{si} \quad -2 \le x \le -1 \\ (x^2 - b)/2 & \text{si} \quad -1 < x \le 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[-2, 0]$ y en caso afirmativo calcula c.

32 Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcular cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

33 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\, x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - sen\, x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} [x^2 - 2x]^{x^2}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\sqrt[x]{b} - 1]$ f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} [tg\, x]^{\cos x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$ h) $\lim\limits_{x \to 1^+} [x - 1] \cdot tg\left[\dfrac{\pi x}{2}\right]$ i) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{a^x + b^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$ $a > 1$ y $b > 1$

j) $\lim\limits_{x \to \pi} [1 - \cos 2x]^{\frac{1}{tg[x/2]}}$ k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2 \cdot e^{\frac{1}{x}} - 1\right]$ l) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x + a^x]^{\frac{1}{x}}$; $a > 1$

m) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \left[\dfrac{2}{sen\, x} - \dfrac{2}{\pi - x}\right]$ n) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln(2 - e^x)}$ ñ) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}\right]$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la universidad

34 Estudia el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

35 Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Como aplicación, prueba que si $x > 0$, entonces $x^e \leq e^x$.

36 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

37 Estudia la concavidad de la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 3)$.

38 Un segmento de longitud 5 cm apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de manera que forma con estos un triángulo rectángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.

39 Halla la ecuación de una recta que pase por el punto (3, 2) y corte los ejes coordenados determinando en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

40 Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

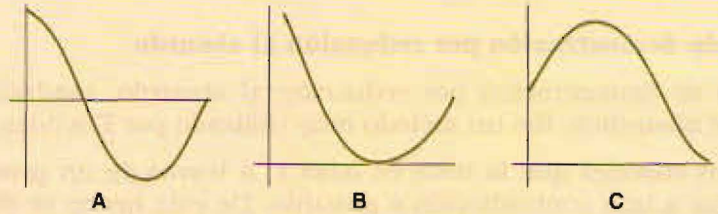
41 ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener un cono circular recto de 1 metro de generatriz? (Recuerda que el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura).

42 Calcula los siguientes límites:

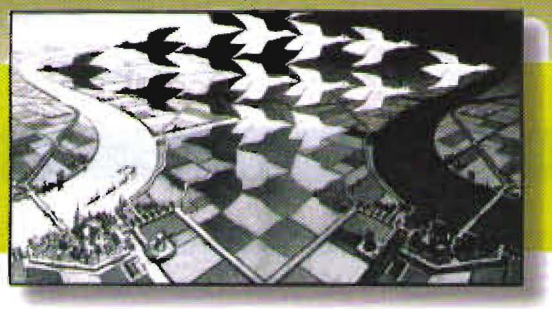
a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\operatorname{cosec} x}{2}}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{e^x - 1}\right)$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

43 La gráficas que se muestran en la figura adjunta corresponden a una función f, a su derivada f' y a otra función g. Todas ellas están definidas en un mismo intervalo. Desafortunadamente, al componer el dibujo (en el que se muestran también los ejes), las gráficas han sido colocadas al azar.
Identificar de forma razonada cuál de ellas corresponde a f, cuál a f' y cuál a g.



44 Prueba que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x = 3$ admite una solución y sólo una en (1, 2).



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

«Este método es una de las más finas armas que puede emplear un matemático. Es un gambito mucho más hermoso que cualquiera de los que pueda ofrecer el juego del ajedrez. Un jugador de ajedrez puede sacrificar un peón o incluso una pieza, pero un matemático sacrifica la partida completa».

G. H. Hardy

• Existen infinitos números primos

Godefroy Harold Hardy (1877-1947), matemático inglés, recoge, en su libro *Autojustificación de un matemático*, dos famosos teoremas de la Matemática griega clásica. El primero de ellos afirma que existen infinitos números primos. La demostración de este teorema se debe a Euclides, y es como sigue.

Tenemos que probar que hay infinitos números primos, es decir, que el conjunto de números:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \ldots$$

tiene infinitos elementos. Para ello, suponemos que este conjunto tiene un número finito de elementos, es decir, existe un último número P.

Sobre tal hipótesis definimos el número Q de la siguiente forma:

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot P + 1$$

Evidentemente Q no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5, 7, ..., P, ya que al dividirlo por cualquiera de ellos siempre nos da 1 por resto. De esto deducimos que Q es un número primo, y como Q es mayor que P, llegamos a una contradicción de la hipótesis de partida, pues el mayor número primo es P.

Godefroy Harold Hardy (1877-1947).

En consecuencia, la hipótesis de partida es falsa y, por tanto, el conjunto de los números primos tiene infinitos elementos.

• Método de demostración por reducción al absurdo

El método de demostración por reducción al absurdo, también llamado método de *reductio ad absurdum*, fue un método muy utilizado por Euclides.

Consiste en suponer que la tesis es falsa y, a través de un proceso de razonamiento lógico, llegar a una contradicción o absurdo. De este hecho se deduce que la tesis del teorema es verdadera, con lo cual quedaría probado el teorema o propiedad.

• El número $\sqrt{2}$ es irracional

El segundo famoso teorema que recoge Hardy en su libro fue demostrado por Pitágoras, o por alguno de sus discípulos, y aparece escrito en los *Elementos*, de Euclides.

Tenemos que demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Para ello, utilizamos el método de demostración por reducción al absurdo.

Suponemos que $\sqrt{2}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{2}$ sería racional, con lo que se puede poner como:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

a, b primos entre sí

De la igualdad anterior obtenemos la siguiente:

$$a = \sqrt{2}\, b$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$a^2 = 2b^2$$

con lo que a^2 es par. Si a^2 es par, significa que a también es par, pues el cuadrado de un número impar es impar.

Como a es par, podemos escribir:

$$a = 2p$$

$$p \in \mathbb{Z}$$

Pitágoras de Samos.

y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 2b^2$ llegamos a las expresiones siguientes:

$$(2p)^2 = 2b^2$$

$$4p^2 = 2b^2$$

$$2p^2 = b^2$$

con lo que b^2 es par y, por tanto, b también es un número par.

Con esto hemos llegado a que a y b son pares. Este resultado contradice el hecho de que a y b son primos entre sí. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir, es irracional.