UNIDAD DIDÁCTICA 5

Geometría afín en el espacio

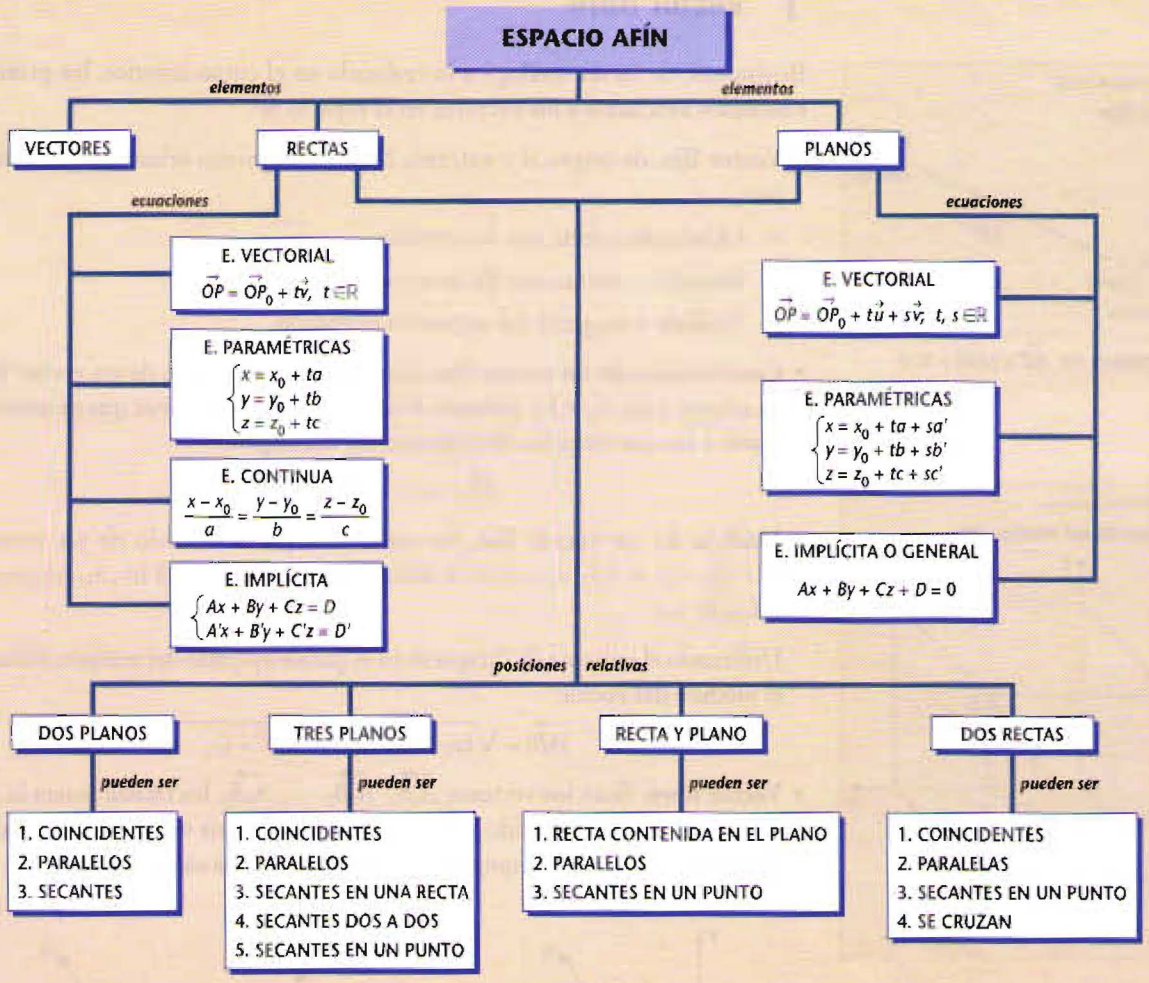
Los griegos construyeron el conocimiento geométrico emanado de la experiencia. En particular, Euclides estructuró el saber geométrico conocido en su época en su obra *Elementos* de forma lógico-deductiva. Tanto los resultados como el estilo de presentación han ejercido una influencia imperecedera a lo largo de los tiempos.

El francés René Descartes (1596-1650) consiguió unir los elementos geométricos con el número a través de los sistemas de referencia. Su obra *La Geometría* marcó una nueva forma de hacer en Matemáticas.

A finales del siglo XIX, los conceptos de Álgebra lineal (sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes) aportaron a la Geometría recursos valiosos para resolver numerosas situaciones. En esta época estaba muy avanzado el estudio de las diversas Geometrías.

Flat Iron Columbus Tower. San Francisco. California.

ESQUEMA CONCEPTUAL



ACTIVIDADES INICIALES

1. Dada la recta del plano de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.

2. Calcula el valor de a en la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$, para que:
   a) Pase por el punto $(3, 1)$.
   b) Tenga de pendiente -1.
   c) Uno de sus vectores directores sea $v = (6, -4)$.

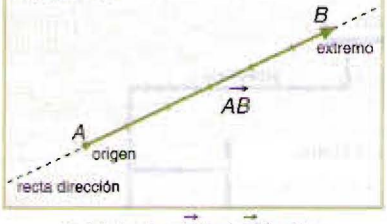
3. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:
   a) $\begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x - 6y = -9 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

4. Estudia la posición relativa, según los valores de a, de los pares de rectas:
   a) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$

desarrollo de contenidos

1 Vector libre

Vector fijo



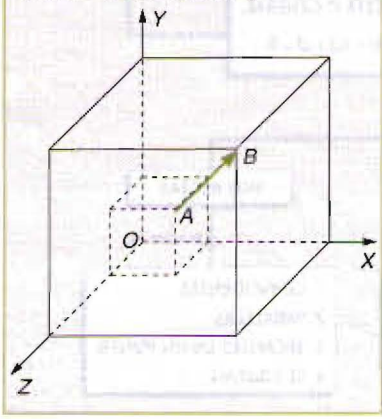
módulo de $\vec{AB} = |\vec{AB}| = 6\ u$

Revisamos, de forma análoga a lo realizado en el curso anterior, los principales conceptos asociados a los vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$.

- **Vector fijo**, de origen A y extremo B, es un segmento orientado caracterizado por:
  - **Dirección** o recta que lo contiene.
  - **Sentido** u orientación de la recta.
  - **Módulo** o longitud del segmento orientado.
- **Coordenadas de un vector fijo.** Llamamos coordenadas de un vector fijo $\vec{AB}$, de origen $A\ (a_1, b_1, c_1)$ y extremo $B\ (a_2, b_2, c_2)$, a los números que se obtienen al restar a las coordenadas del extremo las del origen.

$$\vec{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$$

Módulo de un vector fijo

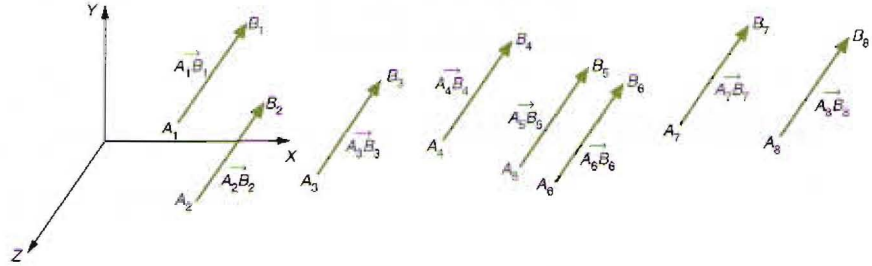


- **Módulo de un vector fijo.** Se considera que el módulo de un vector fijo $\vec{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$ es la distancia entre el origen $A\ (a_1, b_1, c_1)$ y extremo $B\ (a_2, b_2, c_2)$.

  Utilizando el teorema de Pitágoras en el paralelepípedo del margen, obtenemos el módulo del vector.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

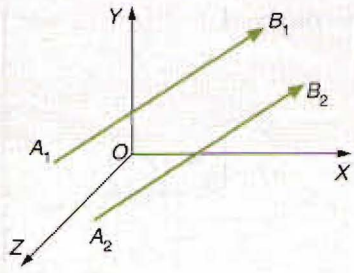
- **Vector libre.** Sean los vectores $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_2B_2}$, ..., $\vec{A_8B_8}$, los cuales tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo. Estos vectores se llaman **equipolentes**. Los vectores equipolentes tiene las mismas coordenadas.



Todos los vectores equipolentes a uno dado definen un vector libre. Los vectores libres se denotan por v o $\vec{v}$, por $(\vec{AB})$ o por $\vec{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$ y pueden venir representados por cualquier vector fijo del conjunto de vectores equipolentes que lo definen.

Vectores equipolentes

Todos los vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas y el mismo módulo.



- $\vec{A_1B_1} = \vec{A_2B_2}$
- $|\vec{A_1B_1}| = |\vec{A_2B_2}|$

- **Coordenadas de un vector libre** $\vec{v}$ son las coordenadas cualquiera de los vectores fijos que podemos tomar como representante.

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

- **Módulo de un vector libre** $\vec{v}$ es el módulo de uno cualquiera de sus representantes.

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Si el módulo de un vector es la unidad decimos que el vector es **unitario**.

2 Operaciones con vectores libres

Las operaciones más sencillas que se realizan con vectores son las que se describen a continuación.

■ Suma de vectores libres

La **suma de los vectores** libres $\vec{v} = (a, b, c)$ y $\vec{v'} = (a', b', c')$ es el vector libre:

$$\vec{v} + \vec{v'} = (a + a', b + b', c + c')$$

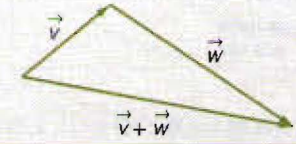
La interpretación geométrica de esta operación puede verse en el margen.
La suma de vectores libres tiene las siguientes propiedades:

1. **Asociativa.** Para tres vectores libres cualesquiera:
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$
2. **Elemento neutro.** El elemento neutro para la suma es el vector nulo: $\vec{0}$ (0, 0, 0) ya que verifica:
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$
3. **Elemento opuesto.** El vector opuesto de un vector $\vec{v} = (a, b, c)$ es $-\vec{v} = (-a, -b, -c)$ ya que se verifica:
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$
4. **Conmutativa.** Para dos vectores libres cualesquiera:
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Interpretación geométrica de la suma de vectores

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores libres. Para sumarlos, tomamos un representante de $\vec{v}$ y por el extremo de este tomamos un representante de $\vec{w}$.

Un vector fijo representante del vector libre $\vec{v} + \vec{w}$ es el que tiene por origen el origen de $\vec{v}$ y por extremo, el extremo de $\vec{w}$.



■ Producto de un número real por un vector

El **producto de un número real** t **por un vector libre** $\vec{v} = (a, b, c)$ es el vector libre:

$$t \cdot \vec{v} = t\vec{v} = (ta, tb, tc)$$

La interpretación geométrica de esta operación puede verse en el margen. El producto de un número real por un vector libre tiene las siguientes propiedades:

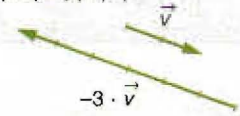
1. **Distributiva mixta.** Para un número real t cualquiera y dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera se verifica:
$$t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$
2. **Distributiva mixta.** Para dos números reales t y s cualesquiera y un vector libre $\vec{u}$ cualquiera se verifica:
$$(t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$$
3. **Asociativa mixta.** Para dos números reales t y s cualquiera y un vector libre $\vec{u}$ cualquiera se verifica:
$$(t \cdot s) \cdot \vec{u} = t \cdot (s\,\vec{u})$$
4. **Elemento neutro.** Para un vector libre $\vec{u}$ cualquiera se verifica:
$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

El conjunto de vectores libres del espacio $\mathbb{R}^3$ con las operaciones suma producto por un número real, por tener las ocho propiedades anteriores, es un **espacio vectorial**, como ya hemos visto en la unidad didáctica anterior.

Interpretación geométrica del producto de un nº real por un vector

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $t \cdot \vec{v} = \vec{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, pueden ocurrir tres casos:
  1. Si $t = 0$, entonces $t \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
  2. Si $t > 0$, entonces $t \cdot \vec{v}$ es un vector con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ y $|t\vec{v}| = t|\vec{v}|$.

  3. Si $t < 0$, entonces $t \cdot \vec{v}$ es un vector con la misma dirección que $\vec{v}$, sentido contrario y $|t\vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}|$



3 Dependencia e independencia de vectores. Bases

Vamos a ver algunos conceptos asociados al espacio vectorial y que serán muy útiles en esta y en las siguientes unidades didácticas. En lo que sigue nos referiremos al vector libre como vector.

■ Vectores dependientes

- Dos vectores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ son **linealmente dependientes** si verifica una de las siguientes definiciones, puesto que son equivalentes:

$$\exists\, t, s \in \mathbb{R},\ t \neq 0 \text{ o } s \neq 0 \mid t\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen igual dirección} \iff \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$$

- Tres vectores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ son **linealmente dependientes** si se verifica una de las siguientes definiciones, puesto que son equivalentes:

$$\exists\, t, s, r \in \mathbb{R} \text{ no nulos a la vez} \mid t\vec{u} + s\vec{v} + r\vec{w} = \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son coplanarios} \iff \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 1 \text{ o } 2$$

■ Vectores independientes

- **Dos vectores** $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ son **independientes** si verifican una de las siguientes definiciones, puesto que son equivalentes:

$$t\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow t = s = 0 \iff \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen distinta dirección} \iff \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

- **Tres vectores** $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ son **independientes** si verifican una de las siguientes definiciones que son equivalentes:

$$t\vec{u} + s\vec{v} + r\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow t = s = r = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ no son coplanarios} \iff \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 3$$

■ Base de vectores

En el espacio de vectores del espacio $\mathbb{R}^3$, tres vectores linealmente independientes forman una **base** del espacio $\mathbb{R}^3$.

La principal característica de una base de vectores es que cualquier vector del espacio $\mathbb{R}^3$ puede escribirse en función de los vectores de la base.

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir de la forma:

$$\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$$

Los números a, b y c se llaman **coordenadas** del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Ejemplo de vectores dependientes

Los vectores:

$\vec{u} = (1, 0, 0)$
$\vec{v} = (0, 1, 0)$
$\vec{w} = (1, 1, 0)$

son dependientes. Lo vemos de las tres formas dadas en la definición.

- $\exists t, s, r \in \mathbb{R} \mid t\vec{u} + s\vec{v} + r\vec{w} = \vec{0}$ (no nulos a la vez)

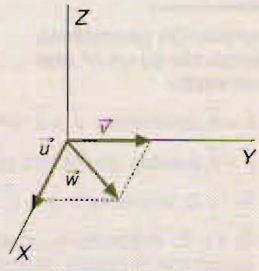
$t(1, 0, 0) + s(0, 1, 0) + r(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$ operando obtenemos:

$$\left.\begin{matrix} t + \quad + r = 0 \\ s + r = 0 \end{matrix}\right\}$$

El sistema tiene infinitas soluciones, por ejemplo:

$t = 3, s = 3, r = 3$

- $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios



- $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

puesto que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

4 Sistemas de referencia

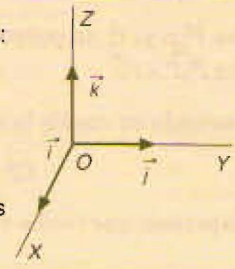
Para localizar un punto o un objeto en el espacio necesitamos un sistema de referencia. El más utilizado es el cartesiano.

El **sistema de referencia cartesiano** en el espacio $\mathbb{R}^3$ es:

$$\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

y está formado por:

- Un punto fijo O que llamamos origen del sistema.
- Una base de vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ unitarios y perpendiculares entre sí, es decir, ortonormales.



■ Coordenadas de un punto

Todo punto del espacio $\mathbb{R}^3$ tiene asociadas tres coordenadas en el sistema de referencia:

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

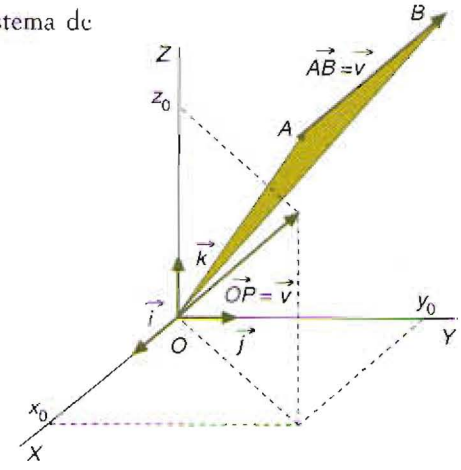
Es equivalente a escribir que:

$$\vec{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = (x_0, y_0, z_0)$$

■ Coordenadas de un vector

Sea el vector $\vec{AB}$ de origen A y extremo B:

$$A(x_1, y_1, z_1)$$
$$B(x_2, y_2, z_2)$$



- El vector $\vec{AB}$ tiene de coordenadas:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

es decir, las coordenadas de su extremo menos las coordenadas del origen.

- Los vectores $\vec{OP}$ y $\vec{AB}$ son representantes del mismo vector libre $\vec{v}$, es decir:

$$\vec{v} = \vec{OP} = \vec{AB} = (x_0, y_0, z_0) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

de donde vemos que las coordenadas de un vector libre vienen dadas por las de uno de sus representantes con origen en el origen de coordenadas.

■ Coordenadas del punto medio de un segmento

Sea el segmento AB, de coordenadas $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. Observando la figura:

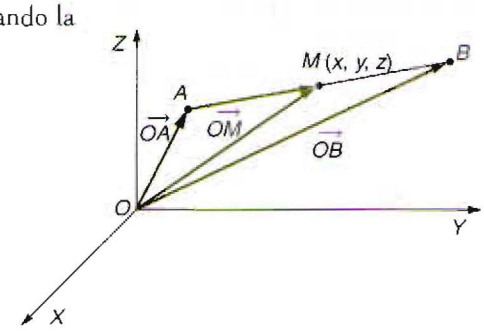
$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OA} + 2\vec{AM}$$

En coordenadas:

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) + 2(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

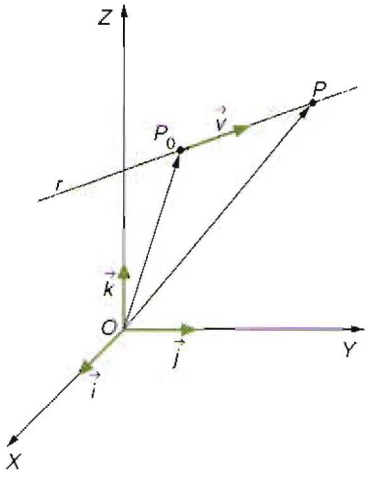
y operando obtenemos las coordenadas del punto medio M:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad ; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



5 Ecuaciones de la recta

En el dibujo del margen hemos representado una recta r, en un sistema de referencia $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ fijo y lleva la dirección del vector $\vec{v}$ de coordenadas (a, b, c).



Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la recta. Existe un número real t que verifica $\vec{P_0P} = t\vec{v}$.

Teniendo en cuenta la suma de vectores, podemos escribir:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} \Rightarrow \vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{v};\ t \in \mathbb{R}$$

Expresión que recibe el nombre de **ecuación vectorial de la recta.**

La **ecuación vectorial** de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$, viene dada por:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{v};\ t \in \mathbb{R},$$

que expresada en coordenadas viene dada por:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c);\ t \in \mathbb{R}$$

Operando en la ecuación vectorial en coordenadas, obtenemos las **ecuaciones paramétricas de la recta.**

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Eliminado el parámetro t de las ecuaciones anteriores, se obtienen las **ecuaciones de la recta en forma continua.**

Las **ecuaciones en forma continua** de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$, vienen dadas por:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Eliminado el parámetro t de las ecuaciones paramétricas u operando dos a dos en las tres razones de las ecuaciones en forma continua obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta.

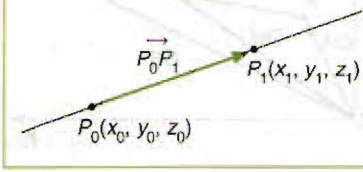
Las **ecuaciones implícitas** (o como **intersección de dos planos**) de la recta r que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (a, b, c)$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

Recta que pasa por dos puntos

La recta que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ viene determinada por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y el vector direccional:

$$\vec{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$



ACTIVIDADES RESUELTAS

1. Expresa las ecuaciones de la recta, en todas sus formas posibles, sabiendo que pasa por el punto $P_0(1, -2, 5)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (3, 1, -2)$.

- La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y, z) = (1, -2, 5) + t(3, 1, -2)$.
- Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$$

estas ecuaciones representan la forma general de todos los puntos de la recta.

- Las ecuaciones en forma continua son:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-2}$$

- Las ecuaciones implícitas, por ejemplo, las obtenemos a partir de la forma continua tomando las razones primera y segunda, y las razones primera y tercera:

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 3z = 17 \end{cases}$$

2. Expresa las ecuaciones de la recta, en todas sus formas posibles, sabiendo que pasa por el punto $P_0(1, -2, 5)$ y por el punto $P_1(-2, 1, 0)$.

La recta viene determinada por el punto $P_0(1, -2, 5)$ y el vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-3, 3, -5)$.

Las ecuaciones pedidas son:

- Vectorial: $(x, y, z) = (1, -2, 5) + t(-3, 3, -5)$
- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$
- Continuas: $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{-5}$
- Implícitas: en las anteriores tomamos 1ª y 2ª razones, y 1ª y 3ª razones $\begin{cases} x + y = -1 \\ 5x - 3z = -10 \end{cases}$

3. Halla las ecuaciones de la recta $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ en forma paramétrica y continua.

Para la forma paramétrica a partir de la forma implícita resolvemos el sistema que es compatible e indeterminado:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \ \text{(I)} \\ x - y - 2z = 1 \ \text{(II)} \end{cases}$$

(I) + (II) $\Rightarrow 3x - z = 4 \Rightarrow z = -4 + 3x$

sustituyendo (I) obtenemos: $y = 7 - 5x$

por tanto las ecuaciones parámetricas son:

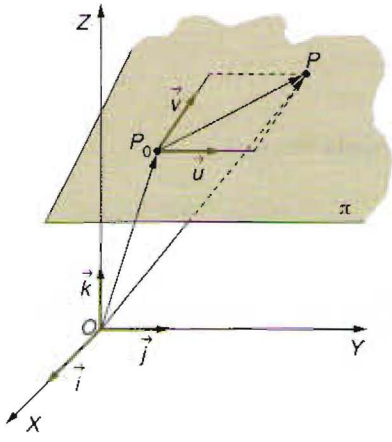
$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

Eliminando t obtenemos las ecuaciones en forma continua:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z+4}{3}$$

6 Ecuaciones del plano

En el margen hemos representado un plano π, en un sistema de referencia $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ fijo y está generado por los vectores direccionales $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$.



Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano. Existen dos números reales t y s que verifican $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{u} + s\vec{v}$.

Teniendo en cuenta la suma de vectores, podemos escribir:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{u} + s\vec{v};\ \ t \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

Expresión que recibe el nombre de **ecuación vectorial del plano**.

La **ecuación vectorial** del plano π que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ viene dada por:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{u} + s\vec{v}\ ;\ t \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

que expresado en coordenadas viene dada por:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) + s(a', b', c')\ \ ;\ \ t \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

Operando en la ecuación vectorial en coordenadas, obtenemos las **ecuaciones paramétricas del plano**.

Las **ecuaciones paramétricas** del plano π que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta + sa' \\ y = y_0 + tb + sb' \\ z = z_0 + tc + sc' \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

Al eliminar los parámetros t y s, deberemos tener en cuenta que la matriz cuyas columnas son los componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene rango dos al ser estos linealmente independientes. Por tanto, se obtendrá:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

La **ecuación general o implícita** del plano π que pasa por un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vectores directores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ vienen dadas por la ecuación:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

La expresión anterior se obtiene del desarrollo del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

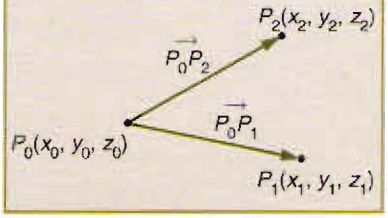
Plano que pasa por tres puntos

El plano que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ viene determinado por:

- el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y
- los vectores direccionales

$\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$



ACTIVIDADES RESUELTAS

1. Expresa las ecuaciones del plano determinado por el punto $P_0(1, 2, 3)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + t \\ z = 3 + s \end{cases}$, con t y $s \in \mathbb{R}$

La ecuación general es: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y - z + 4 = 0$ obtenida al desarrollar el determinante por los adjuntos de la primera columna.

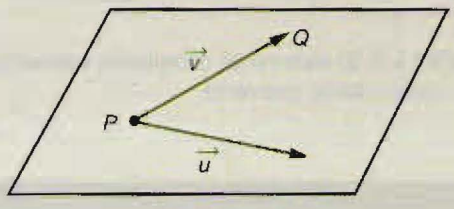
2. Halla las ecuaciones del plano que pasa por los puntos $A(3, 2, -1)$, $B(0, -2, 5)$ y $C(-2, 4, -1)$.

El plano queda determinado por el punto $A(3, 2, -1)$ y los vectores direccionales $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, -4, 6)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-5, 2, 0)$.

Las ecuaciones pedidas son:

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 3t - 5s \\ y = 2 - 4t + 2s \\ z = -1 + 6t \end{cases}$
- Implícita o general: $6x + 15y + 13z - 35 = 0$

3. Halla la ecuación general del plano que pasa por los puntos $P(1, 2, -1)$, $Q(3, 0, 2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (1, 1, -1)$.



Hallamos la ecuación pedida con:

- el punto $P(1, 2, -1)$
- los vectores directores:

$\vec{u} = (1, 1, -1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 3)$

La ecuación implícita o general del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & -2 \\ z+1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 5y - 4z + 5 = 0.$

4. Dado el plano de ecuación π: $2x + 3y + z - 6 = 0$, halla:

a) Tres puntos del plano.

b) Dos vectores directores del plano.

a) Para hallar puntos del plano damos valores a dos coordenadas y obtenemos la tercera coordenada:

$x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 6 \Rightarrow P(0, 0, 6)$

$x = 0, z = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow Q(0, 2, 0)$

$y = 0, z = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow R(3, 0, 0)$

b) Dos vectores directores son:

$\overrightarrow{PQ} = (0, 2, -6)$

$\overrightarrow{PR} = (3, 0, -6)$

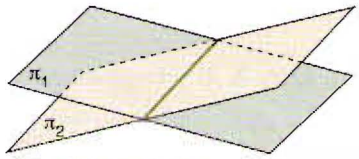
7 Posiciones relativas de dos y tres planos

En el estudio de las posiciones relativas de las rectas y planos en el espacio se utilizan los conceptos y resultados establecidos en la unidad didáctica relativa a los sistemas de ecuaciones lineales.

■ Posiciones de dos planos

Planos coincidentes

Planos paralelos



Planos secantes

Consideramos los planos expresados a través de sus ecuaciones generales:

$$\begin{cases} \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

Analizar las posiciones de estos planos equivale a estudiar el sistema formado por sus ecuaciones. Haciendo uso del teorema de Rouché-Fröbenius, debemos estudiar el rango de la matriz de los coeficientes A, y de la matriz ampliada A^*:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Según los valores posibles de los rangos de A y A^*, pueden darse los casos siguientes:

- **Rango (A) = 1 y rango (A^*) = 1.** El sistema es compatible indeterminado. Las ecuaciones son dependientes y, por tanto, los planos tienen todos sus puntos en común. Los **planos** son **coincidentes**.
- **Rango (A) = 1 y rango (A^*) = 2.** El sistema es incompatible. Las ecuaciones son independientes y, por tanto, los planos no tienen puntos en común. Los **planos** son **paralelos**.
- **Rango (A) = 2 y rango (A^*) = 2.** El sistema es compatible indeterminado. Los planos son secantes. Se cortan dando una recta.

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de planos:

a) $\begin{cases} \pi_1\colon x - 2y + z = 0 \\ \pi_2\colon 3x - 6y + 3z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \pi_1\colon x - 2y + z = 0 \\ \pi_2\colon x - 2y - z = 3 \end{cases}$

a) Los planos π_1 y π_2 son paralelos, ya que el rango de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ es 1 y el rango de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ es 2.

b) Los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta al ser 2 el rango de la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Las ecuaciones implícitas de la recta son:

$$\left.\begin{matrix} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \end{matrix}\right\}$$

■ Posiciones de tres planos

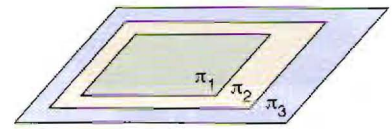
Consideramos los planos expresados a través de sus ecuaciones generales:

$$\begin{cases} \pi_1: & A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ \pi_2: & A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \pi_3: & A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases}$$

Haciendo uso del teorema de Rouché-Fröbenius estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes A, y de la matriz ampliada A^*:

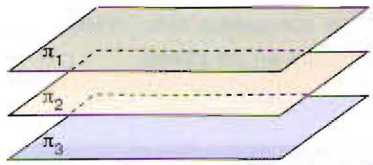
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

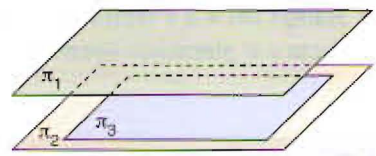
Según los valores posibles de los rangos de A y A^*, pueden darse los casos siguientes:



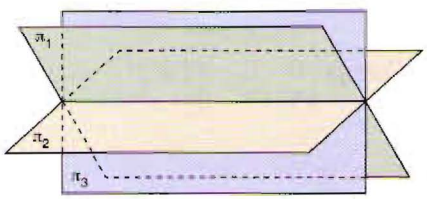
- **Rango** $(A) = 1$ y **rango** $(A^*) = 1$. El sistema es compatible indeterminado. Las tres ecuaciones son dependientes y, por tanto, los planos tienen todos sus puntos en común. Los **planos son coincidentes**.

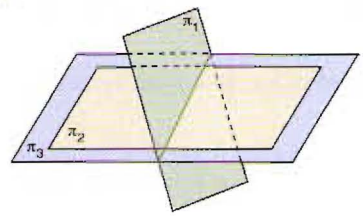
- **Rango** $(A) = 1$ y **rango** $(A^*) = 2$. El sistema es incompatible. Las ecuaciones son independientes y, por tanto, los tres planos no tienen puntos en común. Los **planos pueden ser paralelos y distintos dos a dos** o dos de los planos **coincidentes y** el otro **paralelo y distinto** de los anteriores.



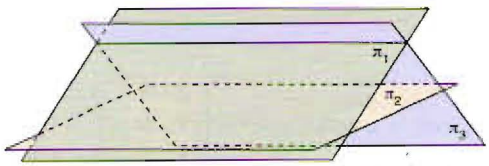


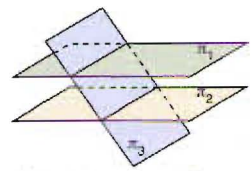
- **Rango** $(A) = 2$ y **rango** $(A^*) = 2$. El sistema es compatible indeterminado. Existen dos ecuaciones independientes, y la otra es combinación de ellas. En este caso, las infinitas soluciones dependen de un parámetro y los planos tienen los puntos en común de una recta. Los tres **planos son distintos y secantes en una recta**, o dos de los planos son **coincidentes** y el otro los **corta en una recta**.

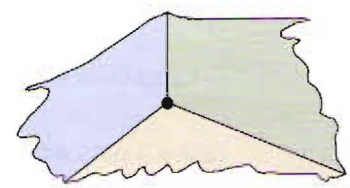




- **Rango** $(A) = 2$ y **rango** $(A^*) = 3$. El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen puntos en común. Las opciones posibles son: los **planos se cortan dos a dos** o dos de los planos son **paralelos** y el otro corta a los anteriores.

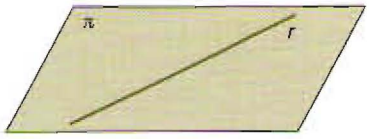




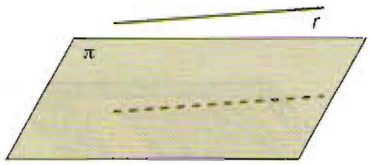


- **Rango** $(A) = 3$ y **rango** $(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado. Los planos son **secantes en un punto**.

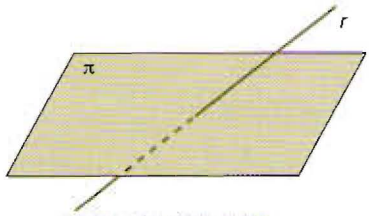
8 Posiciones relativas de una recta y un plano



recta contenida en el plano



recta paralela al plano



recta y plano secantes

Consideramos la recta expresada como intersección de dos planos y el plano definido a través de su ecuación implícita. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \\ \pi: \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases}$$

Haciendo uso del teorema de Rouché-Fröbenius, estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes A, y de la matriz ampliada A^*.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Según los valores posibles de los rangos de A y A^*, pueden darse los casos siguientes:

- **Rango (A) = 2 y rango (A^*) = 2.** El sistema es compatible indeterminado. Los tres planos tienen una recta en común. La **recta está contenida en el plano.**
- **Rango (A) = 2 y rango (A^*) = 3.** El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen puntos en común. Los **recta** y el **plano** son **paralelos.**
- **Rango (A) = 3 y rango (A^*) = 3.** El sistema es compatible determinado. La **recta** y el **plano** son **secantes**, es decir, se **cortan en un punto.**

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Estudia la posición relativa de la recta y el plano siguiente:

a) $\begin{cases} r: \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0} \\ \pi: 5x - 7y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1} \\ \pi: x + y - 3z = 1 \end{cases}$

a) La recta $r: \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano se cortan en un punto, pues rango $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = 3$.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ z = 0 \\ 5x - 7y = -3 \end{cases}$ obtenemos el punto $P(-9, -6, 0)$.

b) La recta y el plano son paralelos. Al expresarlos en la forma

$$\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \\ \pi: x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ es dos y el rango de la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ es tres. Como rango (A) ≠ rango (A^*) ⇒ la recta es paralela al plano.

9 Posiciones relativas de dos rectas

Consideramos las rectas expresadas como intersección de dos planos y estos definidos a través de sus ecuaciones implícitas. Obtenemos el siguiente sistema:

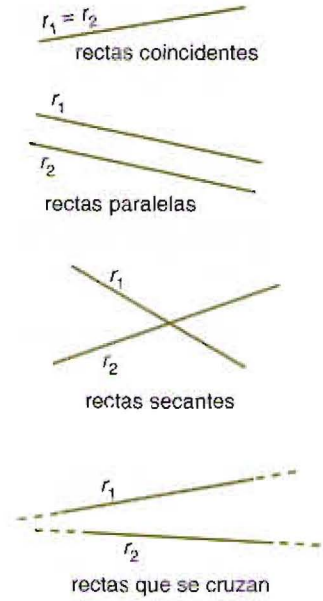
$$\begin{cases} r_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \\ r_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = D_4 \end{cases} \end{cases}$$

Haciendo uso del teorema de Rouché-Fröbenius, estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes A, y de la matriz ampliada A^*:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

Según los valores posibles de los rangos de A y A^*, pueden darse los siguientes casos:

- Rango $(A) = 2$ y rango $(A^*) = 2$. El sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas tienen infinitos puntos en común. Las dos **rectas** son **coincidentes**.
- Rango $(A) = 2$ y rango $(A^*) = 3$. El sistema es incompatible. Las dos rectas no tienen puntos en común pero son coplanarias. Por tanto, las **rectas** son **paralelas**.
- Rango $(A) = 3$ y rango $(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado. Las **rectas** son **secantes**, es decir, se **cortan en un punto**.
- Rango $(A) = 3$ y rango $(A^*) = 4$. El sistema es incompatible. Las rectas no tienen puntos en común y, por tanto, se **cruzan en el espacio**.



ACTIVIDAD RESUELTA

1. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas:

a) $\begin{cases} r_1: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \\ r_2: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r_1: \begin{cases} 2x + y = -5 \\ 4x - z = -10 \end{cases} \\ r_2: \begin{cases} 2y - z = -7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \end{cases}$

a) Las rectas r_1 y r_2 se cortan en el punto de coordenadas $(3/2, 0, -3/2)$.

b) Las rectas r_1 y r_2 se cruzan en el espacio al ser cuatro el rango de la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Actividades resueltas de pruebas de acceso a la universidad

1. Prueba que los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Determina las coordenadas del vector (2, 4, –2) en dicha base.

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es $\det(A) = 4$. Al ser distinto de cero, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas del vector (2, 4, –2), respecto de la base formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, son los números a, b y c, que cumplen la igualdad $(2, 4, -2) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Operando sobre la igualdad anterior, se obtiene el sistema $\begin{cases} -a + b + c = 2 \\ a - b + c = 4 \\ a + b - c = -2 \end{cases}$, cuya solución: $a = 1$, $b = 0$, $c = 3$, son las coordenadas buscadas.

2. Determina los valores de *a* para los cuales resultan linealmente dependientes los vectores (–2, *a*, *a*), (*a*, –2, *a*) y (*a*, *a*, –2). Obtén, en estos casos, la relación de dependencia entre los vectores.

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{pmatrix}$ es $\det(A) = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a - 1)(a + 2)^2$.

Los vectores son linealmente dependientes para los valores que anulan el determinante anterior, es decir, para $a = 1$ y $a = -2$.

En el caso que $a = 1$, la relación de dependencia entre los vectores es, por ejemplo:

$$(1, 1, -2) = -(-2, 1, 1) - (1, -2, 1)$$

En el caso que $a = -2$, los tres vectores son iguales.

3. Dados los puntos *A* (1, 3, 5) y *B* (–2, 4, 1), halla las coordenadas del punto *C*, perteneciente al plano *OXY* de forma que *A*, *B* y *C* estén alineados.

Para que el punto $C(a, b, 0)$ esté alineado con A y B, el punto C debe pertenecer a la recta determinada por los puntos A y B:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-4}$$

Haciendo que el punto $C(a, b, 0)$ pertenezca a la recta anterior, $\frac{a-1}{-3} = \frac{b-3}{1} = \frac{0-5}{-4}$, y resolviendo, se obtiene:

$a = \frac{-11}{4}$ y $b = \frac{17}{4}$. El punto buscado es $C\left(-\frac{11}{4}, \frac{17}{4}, 0\right)$

4. Calcula el valor de *a* para que los cuatro puntos estén en un mismo plano (*a*, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3), (7, 2, 1). Calcula la ecuación del plano.

- La ecuación del plano incidente con los puntos $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$ y $C(7, 2, 1)$ es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 4y + 3z - 2 = 0$$

(AB, AC)

- El punto $D(a, 0, 1)$ debe verificar la ecuación del plano por lo que $a = -1$.

5. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x + z = 8 \\ y + z = 4 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$

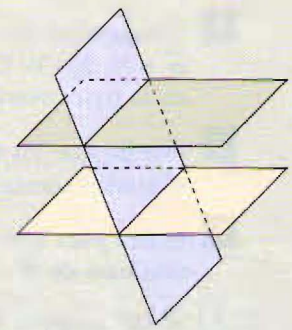
Estudiando el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

se obtiene que rango $(A) = 3$ y rango $(A^*) = 4$.

Por tanto, las rectas r y s se cruzan.

6. Determina la posición relativa de los planos $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$



Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada, se obtiene que rango $(A) = 2$ y rango $(A^*) = 3$.

La posición de los planos es la siguiente: el segundo y tercer plano son paralelos y el primero corta los otros dos.

7. Estudia para los diferentes valores de m la posición relativa de los planos:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} mx - y - z = -m \\ x - my + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

a) El valor del determinante de la matriz de los coeficientes A, $\det(A) = (m-1)^2(m+2)$, permite realizar la siguiente discusión:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, los tres planos se cortan en un único punto.
- Si $m = -2$, los tres planos se cortan dos a dos.
- Si $m = 1$, las tres ecuaciones describen el mismo plano.

b) El valor del determinante de la matriz de los coeficientes A, $\det(A) = -2m(m+1)$, permite llegar a los siguientes casos:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, los tres planos se cortan en un punto.
- Si $m = 0$, los tres planos se cortan dos a dos.
- Si $m = -1$, los tres planos se cortan en una recta.

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

1 Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (2, 3, 5)$ y $B = (1, 0, 8)$, se pide:

a) Halla las componentes de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

b) Halla dos puntos C y D tales que $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

c) Halla el extremo F de un vector fijo $\overrightarrow{EF}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $E = (-3, 6, -9)$.

d) Halla el origen G de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $H = (3, 2, 9)$.

2 Sean $\vec{u} = (5, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, 2, 1)$ dos vectores libres. Se pide:

a) Dibuja un representante de cada uno de ellos y de su suma.

b) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ y $A = (0, 2, 0)$?

c) ¿Cuáles son las componentes de los vectores $2\vec{u}$ y $3\vec{u} - 5\vec{v}$?

3 Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $(5, 3, 5) = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ y $(3, 2, 3) = \vec{u} + 2\vec{v}$.

4 Comprueba que son una base los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, 0, 2)$; $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -3)$. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{x} = (1, 1, 1)$ e $\vec{y} = (1, 2, 3)$ respecto de la base anterior.

5 Prueba que los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 4, 4)$ son linealmente dependientes. Expresa uno de ellos como combinación de los otros.

6 Indica para qué valores de t los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$; $\vec{v} = (2, 2, t)$ y $\vec{w} = (t, 0, 0)$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

⇨ **7** Si los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son linealmente independientes, comprueba que también son linealmente independientes los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, siendo:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1,\ \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ y } \vec{v}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

8 Sean a, b y c tres números reales cualesquiera. Prueba que los vectores $(1, a, b)$; $(0, 1, c)$ y $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

9 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene como vector direccional el vector $\vec{v} = (6, 5, 4)$. Obtén seis puntos que pertenezcan a dicha recta.

10 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(1, 0, 1)$.

11 Estudia si los puntos $A(3, -4, 2)$, $B(1, 2, 3)$ y $C(-1, 4, 6)$ están alineados.

12 Una recta pasa por el punto $(3, 1, 2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (1, -2, 3)$. Comprueba si los puntos $(4, -1, 5)$, $(2, 3, -1)$, $(6, 7, 4)$, $(0, 1, 3)$ y $(6, -5, 11)$ pertenecen a la recta anterior.

13 Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas que conozcas:

a) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ b) $\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

14 Determina m y n, sabiendo que los tres puntos $(1, 2, 0)$, $(2, 3, 1)$ y $(m, 1, n)$ están alineados.

15 Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1, 1, 1)$, $B(3, 5, 7)$ y $C(0, 3, 0)$.

16 Dados los puntos (1, 3, –2) y (2, 3, 5), halla m y n para que el punto $(m + 1, 3, n)$ esté alineado con los otros dos.

17 Halla la ecuación de los planos, en todas las formas que conozcas, determinados por las condiciones:

a) Plano que pasa por el punto $P(2, -3, 5)$ y tiene como vectores direccionales a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$.

b) Plano que pasa por los puntos $P(3, -1, 0)$ y $Q(1, -1, 3)$ y contiene el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

c) Plano que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(2, -1, 0)$.

18 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -4, 0)$ y contiene la recta:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

19 Halla la ecuación del plano que contiene las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases} \text{ y } s: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

20 Halla las ecuaciones de los ejes coordenados y de los planos coordenados del sistema de referencia ortonormal $OXYZ$.

21 Escribe las ecuaciones paramétricas del plano: $3x - y + 2z = 10$.

22 Escribe la ecuación implícita o general del plano: $x = 3 - t$, $y = 2 + s$, $z = t + s$.

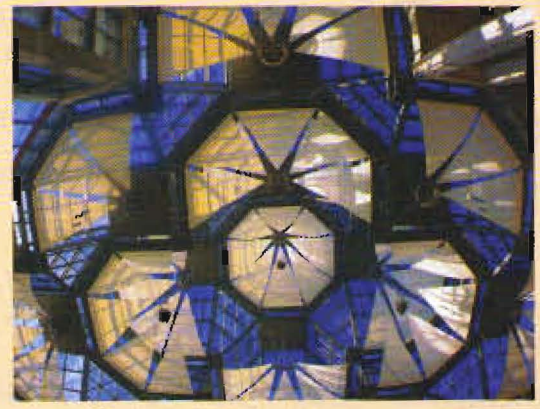
23 Prueba que $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 3y + 7z = 6 \end{cases}$ y $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$ representan la misma recta.

24 Sean las rectas $r: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

Halla la ecuación de un plano que pasa por $A(-1, -1, 0)$ y es paralelo a las dos rectas. Halla la intersección de dicho plano con los ejes coordenados.

25 Dados los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, -1, 3)$, halla la ecuación del plano π que contiene la recta que pasa por A y por B y es paralelo a la recta que pasa por C y por D.

Kandinsky



Cúpula de la National Gallery, Canadá

26 Determina la posición relativa del plano $3x - 2x + z = 3$ y la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1}$

27 Estudia la posición relativa de los planos, para cada uno de los casos siguientes:

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 8y - z = 0 \\ x - y = -4 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$

28 Determina la posición relativa de las rectas $r: x = -y = -z$ y $s: z = 2,\ y = x + 2$.

29 Averigua para qué valor de m la recta $r: \begin{cases} x + 2y + z = m \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$ se corta con la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$

30 Estudia si las rectas $r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$ se cortan, son paralelas o se cruzan. Halla el plano que contiene a s y es paralelo a r.

31 Determina m para que las rectas $r: \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$ estén situadas en un mismo plano. Halla la ecuación de este plano.

32 Determina m y n para que los planos de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - mz = n \end{cases}$ se corten en una recta.

Halla también la ecuación del plano que contiene la recta anterior y pasa por el punto $P(2, 1, 3)$.

33 Halla la ecuación del plano que contiene la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ y es paralelo a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$

34 Calcula razonadamente el valor de a para que los siguientes cuatro puntos estén en un mismo plano del espacio: $(a, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ y $(7, 2, 1)$. Calcula también, de una manera razonada, la ecuación del plano que los contiene.

35 Halla la ecuación del plano que contiene la recta de ecuaciones $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(2, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

36 Dados el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene la recta r y es perpendicular al plano π.

37 Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$ y $D(p, q, r)$:

a) ¿Qué relación deben cumplir p, q y r para que los puntos A, B y D estén alineados?

b) ¿Qué relación deben cumplir p, q y r para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios?

38 Determina m y n para que los planos $6x - my + 4z + 9 = 0$ y $9x - 3y + nz - n = 0$ sean paralelos.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la universidad

39 ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $(1, 1, 1)$; $(1, a, 1)$ y $(1, 1, a)$ es una base de $\mathbb{R}^3$?

40 Consideremos la recta r, el plano π y el punto P, siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}; \qquad \pi: 2x - y + 3z = 1; \qquad P(1, 0, 4)$$

Obtén una recta s paralela a r que pase por el punto P. Calcula el punto de intersección de π y s.

41 Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 0$ y que pasa por el punto $(2, 0, 0)$.

42 Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto $(4, 5, 6)$.

43 Dado un tetraedro $ABCD$ de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$, $C(5, 3, 0)$ y $D(3, 4, 3)$:

a) Comprueba que los puntos medios de las aristas AB, BD, CD y CA están en un mismo plano y halla su ecuación.

b) El plano obtenido es paralelo a las otras dos aristas CB y AD.

44 Siendo r la recta determinada por las ecuaciones $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano π definido por $2x + y + mz = n$, halla m y n, de modo que:

a) r corte a π b) r y π sean paralelos c) r esté contenida en π

45 Halla la ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 1)$ y contiene la recta r: $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$

46 Estudia la posición relativa de las rectas r: $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 2 \end{cases}$

47 Estudia, según los valores del parámetro m, la posición relativa de las rectas:

$$r: \{x - 2z = 1,\ y - z = 2\} \quad \text{y} \quad s: \{x + y + z = 1,\ x - 2y + 2z = m\}$$

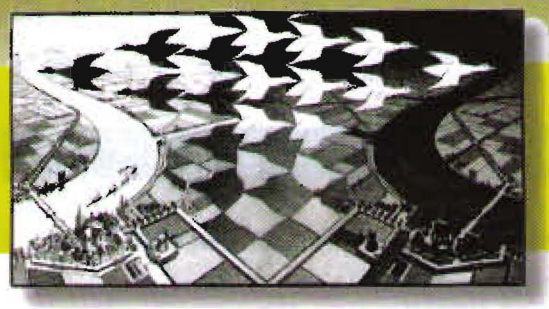
48 Estudia, para los diferentes valores de m, la posición relativa de los planos:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = m \\ 2x - 5y + mz = -2 \end{cases}$

49 El plano $x + y + z = 0$ y la recta de ecuaciones $x = 1 + t$; $y = 2 - t$; $z = -4 + t$ se cortan en el punto A. Halla de forma razonada la ecuación de la recta que pasa por A y por $B(2, 2, 3)$.

50 De dos rectas en el espacio se sabe que no son coplanarias, ¿qué posiciones relativas pueden tener? Poner un ejemplo de cada una de las posiciones y razonar la respuesta.

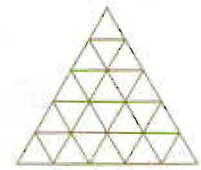
51 Prueba que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera (en el espacio) son siempre vértices de un paralelogramo.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

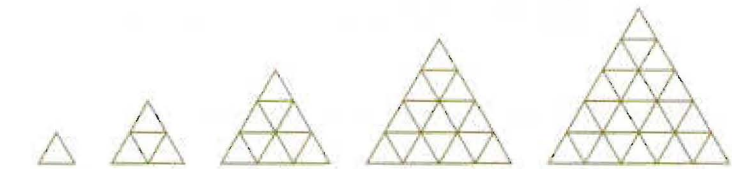
En la resolución de problemas, muchas veces el comenzar por casos más sencillos nos facilita la comprensión y la resolución del mismo, como puedes observar en el siguiente problema:

TRAMA TRIANGULAR. En la figura tenemos representada una trama triangular de 5 unidades de lado, formada por triángulos equiláteros. ¿Cuántos triángulos equiláteros, con el vértice hacia arriba, podemos contar en una trama triangular de *n* unidades de lado? ¿Cuántos de ellos tienen 1 unidad de lado? ¿Cuántos tienen 2 unidades de lado? ¿Cuántos tienen *n* unidades de lado?



Familiarización con el problema.

Comenzamos jugando con el problema y contando el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia arriba en las tramas de 1, 2, 3, 4 y 5 unidades de lado.



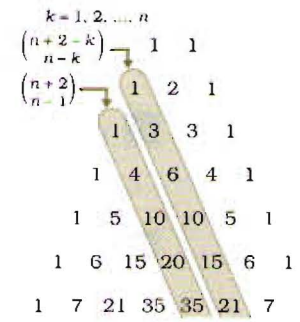
De esta manera, obtenemos la siguiente tabla:

	N° de triángulos de lado 1	N° de triángulos de lado 2	N° de triángulos de lado 3	N° de triángulos de lado 4	N° de triángulos de lado 5	Total de triángulos
TRAMA $n = 1$	1					1
TRAMA $n = 2$	3	1				4
TRAMA $n = 3$	6	3	1			10
TRAMA $n = 4$	10	6	3	1		20
TRAMA $n = 5$	15	10	6	3	1	35

Búsqueda de estrategias. Los números de las filas de la tabla anterior y los números referentes al total de triángulos nos recuerdan al triángulo de Pascal.

Llevar adelante la estrategia. Observando el triángulo de Pascal, nos quedamos absolutamente sorprendidos al ver que los números de las filas y de la columna de la tabla anterior aparecen en las diagonales remarcadas en el triángulo. Por tanto, una trama triangular de *n* unidades de lado tiene el siguiente número de triángulos equiláteros con el vértice hacia arriba:

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



Y en esta trama, el número de triángulos de las diferentes unidades de lado aparece en la siguiente tabla:

N° de triángulos de lado k	N° de triángulos de lado 1 $k = 1$	N° de triángulos de lado 2 $k = 2$	N° de triángulos de lado 3 $k = 3$		N° de triángulos de lado $n-1$ $k = n-1$	N° de triángulos de lado n $k = n$
$\binom{n+2-k}{n-k}$ k varía de 1 a n	$\binom{n+1}{n-1}$	$\binom{n}{n-2}$	$\binom{n-1}{n-3}$		$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{0}$

Revisar el proceso y sacar consecuencias de él. Valoramos muy positivamente el haber comenzado particularizando el problema, pues ello nos ha llevado a encontrar la estrategia basada en el triángulo de Pascal.

Simplificar. Particularizar

La mayoría de los problemas nos resultan difíciles al principio por varias razones. Entre ellas podemos citar: gran número de datos presentes en el enunciado, muchas relaciones entre los datos y cuestiones o preguntas muy generales. Parece lógico comenzar haciendo más fáciles estos problemas, lo cual muy probablemente nos sugerirá el camino para resolver el problema original.

Existen dos procedimientos básicos para hacer más fácil el problema:

— **Simplificar** el problema, es decir, fraccionarlo en partes y resolver cada una de ellas por separado.

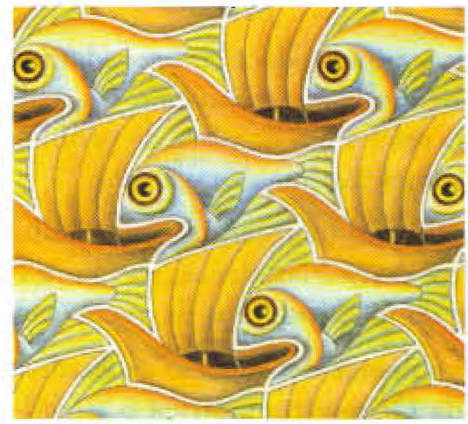
— **Particularizar** el problema, es decir, comenzar con un problema parecido al propuesto con un número más asequible de datos.

La dificultad inicial que plantea el problema de la trama triangular era contar todos los triángulos equiláteros que tienen el vértice hacia arriba. Esta dificultad se ha salvado al particularizar el problema a tramas triangulares más sencillas. Esta particularización nos ha hecho visualizar la estrategia que nos ha resuelto el problema.

El número total de triángulos en la trama de n unidades de lado es la suma de los triángulos de lado 1 más los triángulos de lado 2, y así hasta los triángulos de lado n. Por tanto, debe verificarse:

$$\sum_{n=1}^{k} \binom{n+2-k}{n-k} = \binom{n+1}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \binom{n-1}{n-3} + \ldots +$$

$$+ \binom{3}{1} + \binom{2}{0} = \binom{n+2}{n-1}$$

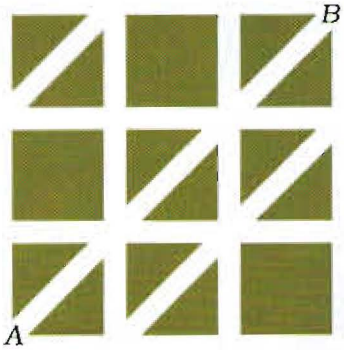


Para hacer el estudio de este mosaico de M. Escher (1898-1972) es necesario simplificarlo descubriendo la loseta o losetas que lo generan

Nos preguntamos, ¿cómo podemos demostrarlo?

Utiliza la estrategia de simplificar y/o particularizar en la resolución de los siguientes problemas:

1. SUMAS. Demuestra: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{999\cdot 1001} = 0,\overline{498501}$



2. PLANO DE CIUDAD. La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?

3. TRAMA TRIANGULAR. Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.

4. PRIMOS. Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

5. TABLERO DE AJEDREZ. ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?