# EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA ANALITICA DEL ESPACIO

## 1. Determinar la posición relativa de las siguientes parejas de planos:

a) $\pi: 2x+3y-z+8=0 \qquad \pi': -4x-6y+2z-16=0$

b) $\pi: 3x+2y-6z-7=0 \qquad \pi': 4x-y+z+2=0$

c) $\pi: 3x-y+z=-1 \qquad \pi': 6x-2y+2z=7$

d) $\pi: 3x-y+5z+1=0 \qquad \pi': 4x+y+7z+12=0$

a) Discutamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=-8 \\ -4x-6y+2z=16 \end{array}\right\}$$

la matriz de coeficientes y la ampliada son, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -8 \\ -4 & -6 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

como todos los menores de segundo orden que se pueden extraer de la matriz A son nulos ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}=-12+12=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=4-4=0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}=6-6=0$$

se tiene que r(A)=r(B)=1, el sistema es compatible e indeterminado con dos grados de indeterminación. Los dos son coincidentes.

b) Ahora el sistema a estudiar es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y-6z=7 \\ 4x-y+z=-2 \end{array}\right\}$$

En la matriz A de los coeficientes, el menor:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-3-8=-11\neq 0$$

por tanto, r(A)=r(B)=2, el sistema es compatible e indeterminado con un grado de indeterminación. Los planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas son las dadas por el sistema de ecuaciones.

c) En el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+z=-1 \\ 6x-2y+2z=7 \end{array}\right\}$$

Los tres menores de segundo orden extraídos de la matriz de los coeficientes son nulos, en efecto:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-6+6=0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=6-6=0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=-2+2=0$$

por tanto, r(A)=1. Pero el ampliado $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 21+6=27 \neq 0 \Rightarrow r(B)=2$ El sistema es incompatible. Los planos son paralelos.

d) El sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+5z=-1 \\ 4x+y+7z=-12 \end{array}\right\}$$

Como el menor:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3+4=7 \neq 0$$

se tiene que r(A)=r(B)=2, el sistema es compatible e indeterminado con un grado de indeterminación. Los planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas vienen dadas por el sistema de ecuaciones.

## 2. Dado el plano $\pi \equiv 3x-5y+z-2=0$, determinar la ecuación de un plano $\pi'$, paralelo a $\pi$ que contenga al punto A(-3, 2, 4).

Un vector normal al plano $\pi$ es $\vec{v}(3,-5,1)$, como $\pi'$ ha de ser paralelo a $\pi$, el vector anterior será también normal a $\pi'$, por tanto, éste será de la forma:

$$\pi': 3x-5y+z+D=0$$

donde nos falta determinar D, cosa que haremos teniendo en cuenta que el punto A ha de satisfacer la ecuación de este plano por estar contenido en él, es decir:

$$3\cdot(-3)-5\cdot 2+4+D=0 \Rightarrow D=15$$

siendo, pues $\boldsymbol{\pi' \equiv 3x-5y+z+15=0}$ el plano pedido.

***Otro Método:*** $3\cdot(x+3)-5\cdot(y-2)+1\cdot(z-4)=0 \Rightarrow \boldsymbol{3x-5y+z+15=0}$

## 3. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x=5-3t+2s \\ y=6+2t-s \\ z=7-t+5s \end{cases} \qquad \pi': \begin{cases} x=2+7\mu \\ y=6+\lambda-3\mu \\ z=-5+13\lambda+24\mu \end{cases}$$

Transformemos ambos planos a la forma implícita, en el primero tenemos que:

$$\begin{vmatrix} x-5 & -3 & 2 \\ y-6 & 2 & -1 \\ z-7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10(x-5)+3(z-7)-2(y-6)-4(z-7)-(x-5)+15(y-6)=0$$

$$\Rightarrow 10x-50+3z-21-2y+12-4z+28-x+5+15y-90=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 9x+13y-z-116=0$$

En cuanto al segundo:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 7 \\ y-6 & 1 & -3 \\ z+5 & 13 & 24 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 24(x-2)+91(y-6)-7(z+5)+39(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x-48+91y-546-7z-35+39x-78=0 \Rightarrow \pi': 63x+91y-7z-707=0$$

Discutamos ahora el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 9x+13y-z=116 \\ 63x+91y-7z=707 \end{array}\right\}$$

Como todos los menores de segundo orden que pueden extraerse de la matriz de los coeficientes son nulos como es fácil comprobar, r(A)=1 pero el ampliado $\begin{vmatrix} 9 & 116 \\ 63 & 707 \end{vmatrix} = -945 \neq 0 \Rightarrow r(B)=2$ y el sistema es incompatible. Los planos son paralelos.

---

## 4. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{l} \alpha: x+y-z+2=0 \\ \beta: 2x-y+3z+5=0 \\ \gamma: 3x+2z+7=0 \end{array}$$

Estudiemos el sistema de ecuaciones que forman los tres.

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2+9-3-4=0 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

Pero el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2=-3 \neq 0$$

entonces r(A)=2

Orlemos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7-15-6+14=0 \Rightarrow r(B)=2$$

El sistema es compatible e indeterminado con un grado de libertad. Los tres planos se cortan en una recta cuya ecuación implícita sería la determinada por las dos primera ecuaciones del sistema anterior.

---

## 5. Discutir, según los valores de m, la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{l} \pi: x+y+z=m+1 \\ \pi': x+my+z=1 \\ \pi'': mx+y+(m-1)z=m \end{array}$$

En el sistema de ecuaciones que forman los tres, el determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)+m+1-m^2-1-m+1=$$

$$= m^2-m+m+1-m^2-1-m+1=-m+1$$

De donde se tienen dos posibilidades:

1ª) Si m=1, entonces r(A)=1 ya que el sistema se convierte en:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$

siendo nulo el determinante de la matriz de coeficientes, pero el menor de segundo orden extraído de ella:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

entonces r(A)=2. Orlando este menor con los términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-2-1=-1\neq 0 \Rightarrow r(B)=3$$

El sistema es incompatible y los planos no se cortan los tres simultáneamente en punto alguno. Analicemos las ecuaciones tomadas de dos en dos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$ ➔Claramente incompatible ya que r(A)=1 y r(B)=2. Estos dos planos son paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$ ➔Compatible e indeterminado con 1 grado de indeterminación, estos planos se cortan en una recta ya que r(A)=r(B)=2

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$ ➔Compatible e indeterminado con un grado de indeterminación ya que r(A)=r(B)=2, estos dos planos se cortan en una recta.

En resumen si m=1, de los tres planos dados, dos de ellos son paralelos y el tercero los corta a ambos según dos rectas paralelas.

2ª) Si $m \neq 1$, en el sistema inicial se tiene que r(A)=r(B)=3 siendo el sistema compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un punto que pasamos a determinar por la regla de Crámer en función de m:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m^2-1)+m+1-m^2-m-1-m+1=$$

$$= m^3-m+m+1-m^2-m-1-m+1=m^3-m^2-2m+1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & m & m-1 \end{vmatrix} = m-1+m^2+m+m-m-m-m^2+1 = m$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2+m+m+1-m^3-m^2-1-m =$$

$$= m^3+m$$

Siendo el punto de corte de los tres planos:

$$P\left(\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m}, \frac{m}{1-m}, \frac{m^3+m}{1-m}\right)$$

---

**6. Determinar la posición relativa de los planos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de acuerdo con los valores de los parámetros a y b.**

$$\alpha: 3x-y+2z=1$$
$$\beta: x+4y+z=b$$
$$\gamma: 2x-5y+az=-2$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones formado por las de los tres planos dados es:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a-2-10-16+15+a = 13a-13$$

Y se anula para a=1. Como el menor de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12+1 = 13 \neq 0$$

podemos afirmar que:

**Para a=1:** r(A)=2

Orlando el determinante anterior no nulo con los términos independientes tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -24-2b-5-81+15b-2 = 13b-39$$

que se anula para b=3

Entonces tenemos los siguientes casos:

**1º) Si a=1 y b=3:**

r(A)=r(B)=2. El sistema es compatible e indeterminado con un grado de indeterminación. Los tres planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas son las formadas tomando las dos primeras ecuaciones del sistema formado por las de los tres planos.

**2º) Si a = 1 y $b \neq 3$:**

$\mathbf{r(A)=2 \neq r(B)=3}$. El sistema es incompatible. Veamos lo que sucede con los planos analizando los tres sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas que se pueden extraer del inicial:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \end{array}\right\}$$ tiene r(A)=r(B)=2. Los dos planos se cortan en una recta

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y+z=-2 \end{array}\right\}$$ tiene r(A)=r(B)=2. Los dos planos se cortan en una recta.

$$\left.\begin{array}{l} x+4y+z=b \\ 2x-5y+az=-2 \end{array}\right\}$$ tiene r(A)=r(B)=2. Los dos planos se cortan en una recta.

En este caso pues, los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas formando una superficie prismática.

**Si $a \neq 1$:**

Independientemente del valor de b, se tiene que r(A)=r(B)=3 siendo el sistema compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un único punto cuyas coordenadas pasamos a determinar usando la regla de Crámer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 4 & 1 \\ -2 & -5 & a \end{vmatrix} = 4a+10b+ab+23$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = -a-4b+3ab+4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13b-39$$

$$x = \frac{4a+10b+ab+23}{13a-13}$$

$$y = \frac{-a-4b+3ab+4}{13a-13}$$

$$z = \frac{13b-39}{13a-13} = \frac{b-3}{a-1}$$

En resumen:

- Si a=1 y b=3, los tres planos se cortan en una recta

- Si a=1 y $b \neq 3$, los tres planos se cortan en tres rectas paralelas determinando una superficie prismática.
- Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto P de coordenadas

$$\left(\frac{4a+10b+ab+23}{13a-13},\frac{-a-4b+3ab+4}{13a-13},\frac{b-3}{a-1}\right)$$

---

## 7. Demostrar que los planos α, β, γ, se cortan en un punto. Determinar las coordenadas de dicho punto:

$$\begin{aligned}&\alpha: 2y-z=7\\&\beta: 3x-2z=9\\&\gamma: y+z=6\end{aligned}$$

Bastará ver que el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es compatible y determinado. Veámoslo:

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\3 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3-6=-9\neq 0\Rightarrow r(A)=r(B)=3$$

sistema compatible y determinado.

Determinemos el punto de corte por la regla de Crámer:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 2 & -1\\9 & 0 & -2\\6 & 1 & 1\end{vmatrix}=-24-9+14-18=-37$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}0 & 7 & -1\\3 & 9 & -2\\0 & 6 & 1\end{vmatrix}=-18-21=-39$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}0 & 2 & 7\\3 & 0 & 9\\0 & 1 & 6\end{vmatrix}=21-36=-15$$

Es decir, los tres planos se cortan en P de coordenadas $P\left(\frac{37}{9},\frac{39}{9},\frac{15}{9}\right)=P\left(\frac{37}{9},\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)$

---

## 8. Determinar la ecuación del plano π, que pertenece al haz de planos de arista r y que pasa por el punto P(6, 7, 0).

$$r:\begin{cases}3x-y+z+1=0\\x+3y-z+3=0\end{cases}$$

La ecuación del haz de planos que tiene como arista r es:

$$3x-y+z+1+\lambda(x+3y-z+3)=0$$

Determinaremos $\lambda$ con la condición de que $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\pi}$, tenemos, sustituyendo las coordenadas de ***P*** en la ecuación del haz:

$$18-7+1+\lambda(6+21)=0 \Rightarrow 12+27\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{12}{27}=-\frac{4}{9}$$

pasando el valor obtenido a la ecuación del haz y simplificando obtenemos el plano buscado:

$$3x-y+z+1-\frac{4}{9}(x+3y-z+3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-y+z+1-\frac{4x}{9}-\frac{4y}{3}+\frac{4z}{9}-\frac{4}{3}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27x-9y+9z+9-4x-12y+4z-12=0 \Rightarrow 23x-21y+13z-3=0$$

es la ecuación del plano $\pi$ buscado.

## 9. Dada la recta r, determinar la ecuación del haz de planos de arista r:

$$r:\begin{cases} x=-3t \\ y=2+2t \\ z=1-t \end{cases}$$

Vamos a pasar r a implícitas, para ellos despejamos el parámetro t en las tres ecuaciones e igualamos los resultados:

$$t=-\frac{x}{3}=\frac{y-2}{2}=1-z$$

Y tomando en la igualdad anterior el primero y segundo miembro, y el primero con el tercero tenemos:

$$r:\begin{cases} -2x=3y-6 \\ -x=3-3z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} -2x-3y+6=0 \\ -x+3z-3=0 \end{cases}$$

siendo la ecuación del haz pedido:

$$-2x-3y+6+\lambda(-x+3z-3)=0$$

## 10. Determinar la posición relativa de la recta r y el plano $\pi$:

$$r:\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

$$\pi: 4x+y-z=3$$

Trataremos de resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas formado por las ecuaciones de la recta y el plano. El determinante de sus coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+4-2-4-1+2=0$$

Pero el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0$$

, lo cual implica que r(A)=2.

Orlando este menor con los términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+4+4+8-1-6 = 6 \neq 0$$

, lo cual implica que r(B)=3

El sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.

---

## 11. Determinar la posición relativa de la recta r y el plano $\pi$:

$$r : \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

$$\pi : x-y+3z=5$$

Procediendo como en el problema anterior:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6+2-1+1+4-3 = -3 \neq 0$$

de donde r(A)=3=r(B)

El sistema es compatible y determinado. La recta r corta al plano $\pi$ en el punto P cuyas coordenadas vamos a determinar resolviendo el sistema por Crámer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3+10-3+5+2-9 = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 18+2+5-3-20-3 = -1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -10+3-1+1+6-5 = -6$$

Siendo las coordenadas de P:

$$P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 2\right)$$

---

## 12. Determinar la posición relativa de las r y r' con respecto al plano $\pi$:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{2} \qquad r' : \frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{5} \qquad \pi : x+2y+4z-13=0$$

Pasemos r y r' a la forma implícita:

$$r:\begin{cases}-5x+5=2y+10\\2x-2=2z+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+2y+5=0\\2x-2z-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+2y+5=0\\x-z-4=0\end{cases}$$

$$r':\begin{cases}-2x+14=6y+18\\5x-35=6z-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+6y+4=0\\5x-6z-29=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3y+2=0\\5x-6z-29=0\end{cases}$$

El sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de r y $\pi$ es:

$$\left.\begin{array}{l}5x+2y=-5\\x-z=4\\x+2y+4z=13\end{array}\right\}$$

Cuyo determinante es:

$$\begin{vmatrix}5&2&0\\1&0&-1\\1&2&4\end{vmatrix}=-2+10-8=0$$

Pero como:

$$\begin{vmatrix}5&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

, se tiene que r(A)=2

Orlando este menor:

$$\begin{vmatrix}5&2&-5\\1&0&4\\1&2&13\end{vmatrix}=8-10-40-26=-68\neq 0$$

, se tiene que r(B)=3

La recta r y el plano $\pi$ son paralelos.

En cuanto al sistema formado por r' y $\pi$, es:

$$\left.\begin{array}{l}x+3y=-2\\5x-6z=29\\x+2y+4z=13\end{array}\right\}$$

Siendo:

$$\begin{vmatrix}1&3&0\\5&0&-6\\1&2&4\end{vmatrix}=-18+12-60=-66\neq 0$$

, se tiene que r(A)=r(B)=3

r' y $\pi$ se cortan en un punto P que determinamos ahora:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 29 & 0 & -6 \\ 13 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -234-24-348 = -606$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 29 & -6 \\ 1 & 13 & 4 \end{vmatrix} = 116+12+78+40 = 246$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 29 \\ 1 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 87-20-58-195 = 186$$

entonces es:

$$P\left(\frac{606}{66}, \frac{-246}{66}, \frac{186}{66}\right) = \left(\frac{101}{11}, -\frac{41}{11}, \frac{31}{11}\right)$$

En cuanto a la posición relativa de r y r' hemos de estudiar el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+2y=-5 \\ x-z=4 \\ x+3y=-2 \\ 5x-6z=29 \end{array}\right\}$$

La matriz de los coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

en la que el menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2+15 = 13 \neq 0$$

, entonces r(A)=3

El determinante de la matriz ampliada es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -6 & 29 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -6 & 29 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 25 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & -5 & 25 \\ -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -(-18-75+12+135) = -240 \neq 0$$

entonces r(B)=4 y r y r' se cruzan.

Es decir, r es paralela a $\pi$ , r' corta a $\pi$ en el punto P y r, r' se cruzan en el espacio

## 13. Determinar el parámetro m para que la recta r sea paralela al plano $\pi$:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{2} \qquad \pi: 4x + my + z - 2 = 0$$

r será paralela a $\pi$ si el sistema de ecuaciones formado por las implícitas de r y la de $\pi$ es incompatible. Dicho sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-4=2y+10 \\ 2x-2=2z-6 \\ 4x+my+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-2y=14 \\ 2x-2z=-4 \\ 4x+my+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=7 \\ x-z=-2 \\ 4x+my+z=2 \end{array}\right\}$$

El sistema será incompatible si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4+2m+1=0 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

y para este valor $\pi$ y r son paralelos.

## 14. Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean paralelas en sentido estricto (es decir, no coincidentes):

$$r: \frac{x-a}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2} \qquad r': \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

Dado que ambas tienen el mismo vector de dirección $\vec{v}(4,2,2)$ , serán siempre paralelas independientemente del valor de "a".
Para que ambas rectas no sean coincidentes un punto cualquiera de la primera (a, -2, 3) no puede pertenecer a la segunda:
$\frac{a-1}{4} = \frac{-2+2}{2} = \frac{3-3}{2} = 0 \Longrightarrow a = 1$ Si a $\neq$ 1 las rectas son paralelas NO coincidentes

## 15. Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean secantes:

$$r: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2} \qquad r': \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{3}$$

Pasemos a implícitas ambas rectas y estudiemos el sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas que se forma:

$$\left.\begin{array}{l} 6x-12=5y \\ 2y=6z+6 \\ 3x-3a=2y+2 \\ 3y+3=3z-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x-5y=12 \\ 2y-6z=6 \\ 3x-2y=2+3a \\ 3y-3z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x-5y=12 \\ y-3z=3 \\ 3x-2y=2+3a \\ y-z=-3 \end{array}\right\}$$

El menor extraído de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 45 - 36 = 9 \neq 0$$

, luego r(A)=3

Para que las rectas sean secantes el determinante de la matriz ampliada habrá de ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2+3a \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6a-8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 6a-8 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot \left(-18a + 24 - 3 + 6a - 8 - 9\right) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (4 - 12a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

---

## 16. Dada la recta r, determinar una recta r', paralela a r, que contenga al punto P(-1, 2, -6)

$$r : \frac{x-5}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z+4}{-6}$$

La recta buscada r' puede tener como vector director el mismo que r, es decir $\vec{v}(2,3,-6)$ y como ha de pasar por P será:

$$r' : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+6}{-6}$$

---

## 17. Demostrar que las rectas r y r' son paralelas en sentido estricto:

$$r : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -3x + 6 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} y = -2x - 2 \\ z = -3x - 8 \end{cases}$$

Tomando x = $\lambda$, las ecuaciones paramétricas de ambas serían:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases} \qquad r' \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = -8 - 3\lambda \end{cases}$$

Viéndose que los vectores directores de ambas son iguales a $\vec{d}(1,-2,-3)$ y por tanto son paralelas.
Para comprobar que r no coincide con r' tomamos un punto de r y lo sustituimos en r', si satisface la ecuación las rectas son coincidentes, en caso contrario serán paralelas.
Un punto de r es: (0, 1, 6) que vemos claramente que no pertenece a r' por lo tanto las rectas r y r' son paralelas en sentido estricto.

---

## 18. Dados los puntos del plano afín $IR^3$, A(1, 1, 1), B(2, 1, 0), C(8, 1, 1) y D(3. 1, 2).

a) Comprobar si dicha cuaterna de puntos forma un paralelogramo.
b) Determinar las ecuaciones de las rectas que se forman tomando dos a dos dichos puntos.

La cuaterna dada determinará un paralelogramo si entre las 6 rectas que determinan esos 4 puntos tomados 2 a 2 hay dos parejas de rectas paralelas.

Determinemos dichas rectas.

Recta AB:

$$r_1 = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Recta AC:

$$r_2 = \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Recta AD:

$$r_3 = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Recta BC:

$$r_4 = \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Recta BD:

$$r_5 = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases}$$

Recta CD:

$$r_6 = \begin{cases} x = 8 - 5t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Los vectores de dirección respectivos son:

$$\vec{v}_1(1,0,-1) \quad \vec{v}_2(7,0,0) \quad \vec{v}_3(2,0,1) \quad \vec{v}_4(6,0,1) \quad \vec{v}_5(1,0,2) \quad \vec{v}_6(-5,0,1)$$

y no existiendo ninguna pareja de los anteriores vectores con dirección paralelas, es decir que cumplan $\vec{v}_i = k\vec{v}_j$, los puntos dados no forman un paralelogramo.

---

**19. Dados los puntos A(1, 3,2), B(2, 5, 1) y C(3, 0, -4), determinar la ecuación de la recta determinada por el punto C y que es paralela a la recta definida por los puntos A y B.**

La recta definida por los puntos A y B tiene por vector director $\vec{v}(1,2,-1)$, y tomando como punto base de la misma el A, sus ecuaciones paramétricas serán:

$$r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

La paralela a ésta por el punto C tendrá el mismo vector director y sus paramétricas son:

$$r':\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -4-\lambda \end{cases}$$

---

## 20. Determinar el valor de a y b para que los puntos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(a-2, 7, b) estén alineados.

Los puntos dados estarán alineados si C pertenece a la ecuación de la recta determinada por A y B, esta recta es:

$$r:\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 3-4\lambda \\ z = 2-3\lambda \end{cases}$$

Si C perteneciera a ella, sus coordenadas satisfarían la ecuación de r, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} -1+3\lambda = a-2 \\ 3-4\lambda = 7 \\ 2-3\lambda = b \end{array}\right\}$$

Despejando $\lambda$ en las tres y forzando la igualdad de los resultados obtenidos tendremos:

$$\lambda = \frac{a-1}{3} = -1 = \frac{b-2}{-3}$$

Y de ahí se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{l} a-1 = -3 \\ b-2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Es decir, las coordenadas de C serán: C(-4, 7, 5)

---

## 21. Dados los puntos A(2, 6, -3) y B(3, 3, -2), determinar aquellos puntos de la recta AB que tengan al menos una coordenada nula.

Las ecuaciones paramétricas de la recta AB son:

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 6-3\lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases}$$

Para los puntos de ella que tengan al menos una coordenada nula probaremos (x, y, 0), (x, 0, z), (0, y, z), (x, 0, 0), (0, y, 0) , (0, 0, z) y (0, 0, 0) determinando el valor de $\lambda$ (si existe) en cada caso.

Para (x, y, 0)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=x\\6-3\lambda=y\\-3+\lambda=0\end{array}\right\}$$
, de la última se obtiene que $\lambda$ =3, valor que sustituido en las otras dos nos da: x=5; y= -3 y el punto buscado es (5, -3, 0)

Para (x, 0, z)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=x\\6-3\lambda=0\\-3+\lambda=z\end{array}\right\}$$
, de la segunda $\lambda$ =2, y en las otras dos x=4; z=-1 siendo el punto (4, 0, -1)

Para (0, y, z)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=0\\6-3\lambda=y\\-3+\lambda=z\end{array}\right\}$$
, de la primera $\lambda$ = -2, entonces y=12; z=-5 siendo el punto (0, 12, -5)

Para (x, 0, 0)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=x\\6-3\lambda=0\\-3+\lambda=0\end{array}\right\}$$
de la 2ª, $\lambda$ = 2 y de la 3ª $\lambda$ = 3, no existe tal punto

Para (0, y, 0)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=0\\6-3\lambda=y\\-3+\lambda=0\end{array}\right\}$$
, de la 1ª $\lambda$ = -2, de la 3ª $\lambda$ = 3, no existe tal punto

Para (0, 0, z)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=0\\6-3\lambda=0\\-3+\lambda=z\end{array}\right\}$$
, de la 1ª $\lambda$ = -2, de la 2ª $\lambda$ = 2, no existe tal punto

Para (0, 0, 0)

$$\left.\begin{array}{l}2+\lambda=0\\6-3\lambda=0\\-3+\lambda=0\end{array}\right\}$$
, de la 1ª $\lambda$ =-2, de la 2ª $\lambda$ =2 y de la 3ª $\lambda$ =3, no existe tal punto.

Los únicos puntos que se ajustan al problema son A(5, -3, 0), B(4, 0, -1), C(0, 12, -5) que son respectivamente los puntos en los que la recta r corta a los planos XY, XZ e YZ

## 22. Dados los puntos A(4, -1, 3), B(2, 5, 8) y C(5, -1, 6), determinar las ecuaciones de las medianas del triángulo ABC.

Las medianas de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

Determinemos los puntos medios de los lados AB, AC y BC a los que llamaremos respectivamente M, N y P.

$$M\left(\frac{6}{2},\frac{4}{2},\frac{11}{2}\right)=\left(3,2,\frac{11}{2}\right)$$
$$N\left(\frac{9}{2},\frac{-2}{2},\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},-1,\frac{9}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{7}{2},\frac{4}{2},\frac{14}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},2,7\right)$$

Las medianas son las rectas que pasan por M y C; por N y B, y por P y A, sus ecuaciones serán, tomando como vectores directores de las mismas:

$$\vec{u}=\vec{MC}\left(2,-3,\frac{1}{2}\right)$$
$$\vec{v}=\vec{NB}\left(-\frac{5}{2},6,\frac{7}{2}\right)$$
$$\vec{w}=\vec{PA}\left(\frac{1}{2},-3,-4\right)$$

las siguientes:

$$m_c:\begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-1-3\lambda \\ z=6+\dfrac{\lambda}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=5+4\lambda \\ y=-1-6\lambda \\ z=6+\lambda\end{cases}$$

$$m_B:\begin{cases} x=2-\dfrac{5}{2}\lambda \\ y=5+6\lambda \\ z=8+\dfrac{7}{2}\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=2-5\lambda \\ y=5+12\lambda \\ z=8+7\lambda\end{cases}$$

$$m_A:\begin{cases} x=4+\dfrac{\lambda}{2} \\ y=-1-3\lambda \\ z=3-4\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-1-6\lambda \\ z=3-8\lambda\end{cases}$$

---

## 23. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(0, 1, 0) y es paralelo a las rectas r y s:

$$r:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+1}{2} \qquad s:\frac{x+4}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$$

Sería lo mismo que calcular la ecuación del plano dado el punto A(0, 1, 0) y los vectores directores $\overrightarrow{d_r}(3,-3,2)$ y $\overrightarrow{d_s}(0,2,1)$:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ y-1 & -3 & 2 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow\ -7x - 3y + 6z + 3 = 0$$

El plano pedido es: $-7x - 3y + 6z + 3 = 0$

## 24. Determinar el valor de a para que los puntos A(0, 0, 1), B(0, 1, 2), C(-2, 1, 3) y D(a, a-1, 2) sean coplanarios.

Determinaremos primero la ecuación del plano que pasa por ABC y veremos qué condición ha de cumplir a para que D pertenezca también a dicho plano.

Plano ABC:

Si tomamos como ecuación general del plano ABD una de la forma:

X + Ay + Bz + D = 0

Sustituyendo las coordenadas de A, B y C obtendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B+D=0} \\ \mathbf{A+2B+D=0} \\ \mathbf{-2+A+3B+D=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{B+D=0} \\ \mathbf{A+2B+D=0} \\ \mathbf{A+3B+D=2} \end{array}\right\}$$

Que resolvemos por Crámer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 - 2 - 1 = 1$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\mathbf{A = -2}$$
$$\mathbf{B = 2}$$
$$\mathbf{D = -2}$$

Siendo el plano ABC:

$$\pi : \mathbf{x - 2y + 2z - 2 = 0}$$

Para que el punto D pertenezca a él, es decir, satisfaga su ecuación, se ha de cumplir:

$$\mathbf{a - 2a + 2 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow -a = -4 \Rightarrow a = 4}$$

siendo entonces el punto D(4, 3, 2)

**25. Determinar la ecuación del plano que contiene al punto A(0, 1, 0) y a la recta:**

$$r:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$$

Si pasamos r a paramétricas:

$$r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=3\lambda\\ z=-2+\lambda\end{cases}$$

Y determinamos dos puntos de ella, dando a $\lambda$ dos valores arbitrarios, tenemos que para:

$\lambda=0$ P(2, 0, -2)

$\lambda=1$ Q(1, 3, -1)

Se trata ahora de encontrar la ecuación del plano que pasa por A, P y Q

Sea en su forma general:

$$\pi: x+Ky+Lz+M=0$$

sustituyendo las coordenadas de los tres puntos:

$$\left.\begin{array}{l}L+M=0\\ 2-2L+M=0\\ 1+3K-L+M=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}L+M=0\\ -2L+M=-2\\ 3K-L+M=-1\end{array}\right\}$$

Y por Gauss:

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&-2&1&-2\\3&-1&1&-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&-1&1&-1\\0&1&1&0\\0&-2&1&-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&-1&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&3&-2\end{pmatrix}$$

entonces:

$$3M=-2\Rightarrow M=-\frac{2}{3}$$

$$L+M=0\Rightarrow L=-M\Rightarrow L=\frac{2}{3}$$

$$3K-L+M=-1\Rightarrow 3K=-1+L-M=-1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow K=\frac{1}{9}$$

el plano pedido es:

$$\pi: x+\frac{y}{9}+\frac{2z}{3}-\frac{2}{3}=0\Rightarrow 9x+y+6z-6=0$$

**26. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A(3, 3, 3) y a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$**

Dos puntos de la recta son por ejemplo B(-1, 2, 0) y C(-1, 2, 1) y dos vectores directores del plano pedido son:

$$\vec{u} = \vec{AB}(-4,-1,-3)$$

$$\vec{v} = \vec{AC}(-4,-1,-2)$$

siendo las ecuaciones paramétricas del plano buscado:

$$\pi: \begin{cases} x = 3 - 4\lambda - 4\mu \\ y = 3 - \lambda - \mu \\ z = 3 - 3\lambda - 2\mu \end{cases}$$

---

**27. Hallar la ecuación del plano π que pasa por los puntos A(1, 2, 2) y B(0, 2, -1) y es paralelo a la recta:**

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$$

Planteamiento: Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector director de r ($\overrightarrow{d_r}$). El plano π pedido será el determinado por estos dos vectores y uno de los puntos dados:

- Vector $\overrightarrow{AB} \Rightarrow (1,0,3)$
- $\overrightarrow{d_r} = (2,-1,-2) \times (2,1,-1) = (3,-2,4)$
- Calculamos el plano π cuyos vectores directores son $\overrightarrow{AB}$ $y$ $\overrightarrow{d_r}$ y que pasa por el punto B(0, 2, 1)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y-2 & 0 & -2 \\ z+1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6x + 5y - 2z - 12 = 0$$

El plano π pedido es: $\mathbf{6x + 5y - 2z - 12 = 0}$

**28. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r: x-2=y-3=z y es paralelo a la recta:**

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{4}$$

**Planteamiento: El plano buscado tendrá como vectores directores los de las rectas *r* ($\overrightarrow{d_r}$) y *s* ($\overrightarrow{d_s}$) y, como contiene a *r*, pasará por el punto (2, 3, 0), que es un punto de la recta *r*.** $\overrightarrow{d_r}(1,1,1)$; $\overrightarrow{d_s}(2,1,4)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ y-3 & 1 & 1 \\ z & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 2y + z = 0$$

El plano pedido es: $-3x + 2y + z = 0$

**29. Dado el plano**

$$\pi:\begin{cases} x = 5 + 3t - 2s \\ y = -2 + 4t - 5s \\ z = 6 - t + s \end{cases}$$

**a) Determinar dos puntos de dicho plano.**

**b) Determinar las ecuaciones de dos rectas secantes contenidas en dicho plano**

**c) Determinar la ecuación general del plano.**

a) Haciendo t=0 y s=0 tenemos que $A(5,-2,6) \in \pi$. Haciendo t=0 y s=1, tenemos que $B(3,-7,7) \in \pi$

b) Los vectores $\vec{u}(3,4,-1)\ y\ \vec{v}(-2,-5,1)$ , son dos vectores directores del plano linealmente independientes y el punto *P*(5, -2, 6) pertenece al plano con lo que las dos rectas secantes pedidas pueden ser:

$$r:\begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 6 - \lambda \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = 5 - 2\mu \\ y = -2 - 5\mu \\ z = 6 + \mu \end{cases}$$

c) La ecuación general del plano saldrá de:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 3 & -2 \\ y+2 & 4 & -5 \\ z-6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y - 7z + 45 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x + y + 7z - 45 = 0}$$

---

**30. Sean los planos** $\pi: 3x - y + 5z - 11 = 0$ , $\pi': 4x + y + 7z + 12 = 0$ .

**a) Determinar la ecuación continua de la recta r determinada por dichos planos.**

**b) Determinar la ecuación del plano paralelo a $\pi$ y que pasa por el punto A(-4, 3, 2).**

a) La recta determinada por dichos planos en su forma implícita es:

$$r:\begin{cases} 3x - y + 5z - 11 = 0 \\ 4x + y + 7z + 12 = 0 \end{cases}$$

haciendo z=t y considerándola como incógnita auxiliar queda:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 11 - 5t \\ 4x + y &= -12 - 7t \end{aligned}\right\}$$

sumando ambas ecuaciones tenemos:

$$7x=-1-12t \Rightarrow x=-\frac{1}{7}-\frac{12}{7}t$$

Y sustituyendo en la primera:

$$y=3x-11+5t=-\frac{3}{7}-\frac{36}{7}t-11+5t=-\frac{80}{7}-\frac{1}{7}t$$

siendo entonces la ecuación continua pedida la de la recta que pasando por el punto $P\left(-\frac{1}{7},-\frac{80}{7},0\right)$, tiene la dirección del vector $\vec{v}(-12,-1,1)$, esto es:

$$\frac{x+\frac{1}{7}}{-12}=\frac{y+\frac{80}{7}}{-1}=\frac{z}{1} \Rightarrow \frac{7x+1}{-84}=\frac{7y+80}{-7}=\frac{z}{1}$$

b) Un plano paralelo a $\pi$, tendrá su mismo vector normal $\vec{n}(3,-1,5)$ y será de la forma:

$$3x-y+5z+k=0$$

donde determinaremos k haciendo que el punto A satisfaga la ecuación de este plano:

$$-12-3+10+k=0 \Rightarrow k=5$$

siendo el plano pedido:

$$3x-y+5z+5=0$$

---

**31. Determinar el valor del parámetro m para que los planos $\alpha, \beta$, y $\gamma$ se intercepten en una recta:**

$$\alpha: mx+y-z=0$$
$$\beta: x+3y+z=0$$
$$\gamma: 3x+10x+4z=0$$

Los tres planos dados se interceptarán en una recta si el sistema de ecuaciones que forman en compatible e indeterminado con un grado de libertad, lo cual exige que r(A)=r(B)=2 y de aquí se deduce que:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 12m+3-10+9-10m-4=0 \Rightarrow 2m-2=0 \Rightarrow m=1$$

---

**32. Sean los planos $\alpha, \beta$ .**

**a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r, intersección de dichos planos.**

**b) Hallar la ecuación del haz de planos de arista r.**

$$\alpha: 4x-3y+7z+8=0$$
$$\beta: -x-y+3z-6=0$$

Las dos ecuaciones dadas formarán las ecuaciones implícitas de la recta r siempre que el rango de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones que forman sea 2, cosa cierta pues el menor:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4-3 = -7 \neq 0$$

Para pasar dicha recta a paramétricas hagamos z=t para obtener:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=-7t-8 \\ -x-y=-3t+6 \end{array}\right\}$$

donde hemos considerado z como incógnita auxiliar. Resolviendo por reducción, para lo cual multiplicamos la 2ª por 3 y restamos miembro a miembro:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=-7t-8 \\ -3x-3y=-9t+18 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 2t-26 \Rightarrow x = \frac{2}{7}t - \frac{26}{7}$$

Y sustituyendo este valor en la 2ª de las iniciales:

$$y = 3t-6-x = 3t-6-\frac{2}{7}t+\frac{26}{7} = \frac{19}{7}t - \frac{16}{7}$$

Siendo las ecuaciones paramétricas pedidas:

$$r:\begin{cases} x = -\frac{26}{7}+\frac{2}{7}t \\ y = -\frac{16}{7}+\frac{19}{7}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{7}+2t \\ y = -\frac{16}{7}+19t \\ z = 7t \end{cases}$$

b) El haz de planos de arista r es:

$$4x-3y+7z+8+\lambda(-x-y+3z-6)=0$$

donde para cada valor del parámetro obtenemos un plano del haz.

---

## 33. ¿Pertenece el plano p: x+y+z+2=0, al haz de planos de arista r?

$$r:\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-3y+4z+2=0 \end{cases}$$

El mencionado haz de planos de arista r es:

$$x+2y-z-1+\lambda(x-3y+4z+2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+2y-z-1+\lambda x-3\lambda y+4\lambda z+2\lambda = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+\lambda)x+(2-3\lambda)y+(4\lambda-1)z+2\lambda-1=0$$

E identificando coeficientes con el plano p dado se ha de cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\lambda=1 \\ 2-3\lambda=1 \\ 4\lambda-1=1 \\ 2\lambda-1=2 \end{array}\right\}$$

cosa absurda pues de esas igualdades se obtienen respectivamente para el parámetro valores diferentes 0, 1/3, ½ y 3/2

El plano p no pertenece al haz pues para que así fuera deberíamos haber obtenido los mismos valores del parámetro en todas las igualdades.

---

**34. Demostrar que si el vector $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, también lo es a cualquier combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

El hecho de que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ implica que han de ser nulos los productos escalares:

$$\vec{w}\cdot\vec{u}=0$$
$$\vec{w}\cdot\vec{v}=0$$

Si tenemos ahora un vector $\vec{a}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ podemos poner con $\alpha,\beta\in \mathrm{IR}$ y no simultáneamente nulos:

$$\vec{a}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

Si multiplicamos escalarmente por $\vec{w}$ la igualdad anterior tendremos:

$$\vec{a}\cdot\vec{w}=(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot\vec{w}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{w}+\beta\vec{v}\cdot\vec{w}=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

donde hemos hecho uso de la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y de la propiedad conmutativa del producto escalar. Con ello queda probado que $\vec{a}$ y $\vec{w}$ son ortogonales como se quería.

---

**35. En $\Re^3$, determinar el valor de a, para que los vectores $\vec{u}(2,a,-3)$ y $\vec{v}(1,-2,a)$ sean ortogonales.**

El producto escalar de ambos habrá de ser nulo para que sean ortogonales, es decir:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2-2a-3a=0\Rightarrow 2=5a\Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

---

**36. Dados los vectores de IR3 $\vec{u}=(3,-1,1)$, $\vec{v}=(2,0,-3)$ y $\vec{w}=(2,-1,2)$, hallar la proyección de $\vec{u}+\vec{v}$ sobre la dirección de $\vec{w}$.**

En general, el producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se puede calcular por:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

siendo las expresiones entre barras los respectivos módulos y $\alpha$ el menor ángulo formado por las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En la expresión anterior $|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ representa (recordando la Trigonometría, la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección de $\vec{a}$, por tanto podemos poner:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \text{proy}_{\vec{a}}(\vec{b}) \Rightarrow \text{proy}_{\vec{a}}(\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

En el problema que se nos presenta llamando $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}=(5,-1,-2)$ y aplicando la expresión anterior tendremos:

$$\text{proy}_{\vec{w}}(\vec{s})=\frac{\vec{w}\cdot\vec{s}}{|\vec{w}|}=\frac{10+1-4}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{\sqrt{9}}=\frac{7}{3}$$

---

**37. Dados los vectores de $\Re^3$ $\vec{u}=(3,-2,3)$, $\vec{v}=(-2,3,0)$ y $\vec{w}=(0,3,-2)$, calcular:**

**a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}$
**b)** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$
**c)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$
**d)** $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6-6=-12$
b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(3,-2,3)\cdot(-2,6,-2)=-6-12-6=-24$
c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(1,1,3)\cdot(0,3,-2)=3-6=-3$
d) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=-12\cdot(0,3,-2)=(0,-36,24)$

---

**38. Dados los vectores de $\Re^3$ $\vec{u}=(3,-2,5)$, $\vec{v}=(1,0,1)$, calcular $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u}+\vec{v}|$ y comprobar que $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$**

Tenemos:

$$|\vec{u}|=\sqrt{9+4+25}=\sqrt{38}$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$|\vec{u}+\vec{v}|=|(4,-2,6)|=\sqrt{16+4+36}=\sqrt{56}$$

Y evidentemente se tiene:

$$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{56}\approx 7{,}48\le\sqrt{38}+\sqrt{2}\approx 7{,}58=|\vec{u}|+|\vec{v}|$$

---

**39. Determinar el ángulo de los vectores $\vec{a}=(8,-4,3)$ y $\vec{b}=(-8,5,-3)$.**

De la definición de producto escalar se tiene que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-64-20-9}{\sqrt{64+16+9}\cdot\sqrt{64+25+9}} = \frac{-93}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{98}} \approx -0{,}9958$$

Y de ahí:

$$\alpha = \arccos(-0{,}9958) \approx 174º44'49''$$

---

**40. Determinar el ángulo que forman las rectas $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-4}{3}$ y $r' \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z}{2}$, averiguando previamente la posición relativa que tienen.**

Unos vectores directores de ambas rectas son, respectivamente $\vec{u}(2,1,3)$ y $\vec{v}(6,-4,2)$.

Para averiguar la posición relativa las pasamos a la forma implícita:

$$r: \begin{cases} x-2 = 2y+10 \\ 3x-6 = 2z-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 12 \\ 3x-2z = -2 \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} 2x+2 = 6z \\ 2y+14 = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-6z = -2 \\ 2y+4z = -14 \end{cases}$$

Y en el sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas que forman las dos parejas de ecuaciones anteriores, se tiene que el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 8-36 = -28 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Y orlando con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & -6 & 2 & 38 \\ 0 & -4 & 6 & 26 \\ 0 & 2 & 4 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 38 \\ -4 & 6 & 26 \\ 2 & 4 & -14 \end{vmatrix} =$$
$$= 504+104-608-456+624-112 = 56 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 4$$

Y las rectas se cruzan en el espacio.

En ángulo que forman es el mismo que el que forma la proyección de r sobre el plano paralelo a r que contiene a r’ y, dados los vectores directores de ambas rectas determinados arriba tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{12-4+6}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{36+16+4}} = \frac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} \approx 0{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \mathrm{ar}\cos(0{,}5) = 60º$$

---

**41. Averiguar el ángulo que forman los planos:**

$$\pi: 2x+4y-z+8=0 \quad \text{y} \quad \pi': x+y+6z-6=0$$

En ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales que son, según las ecuaciones dadas $\vec{n}=(2,4,-1)$ y $\vec{p}(1,1,6)$, por tanto:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}=\frac{2+4-6}{\sqrt{4+16+1}\cdot\sqrt{1+1+36}}=0\Rightarrow\varphi=\arccos(0)=90^{o}$$

es decir, los planos dados son perpendiculares.

---

## 42. Encontrar un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos A(1, 0, 1), B(2, 1, 3) y C(-1, 2, 4), también llamado vector característico o vector normal al plano.

Tomando como punto base del plano el A y como vectores directores del mismo $\vec{AB}(1,1,2)$ y $\vec{AC}(-2,2,3)$, tenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\pi:\begin{cases}x=1+\lambda-2\mu\\ y=\lambda+2\mu\\ z=1+2\lambda+3\mu\end{cases}$$

Y de ahí pasamos a la forma general:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & -2\\ y & 1 & 2\\ z-1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3(x-1)+2(z-1)-4y+2(z-1)-4(x-1)-3y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-3+2z-2-4y+2z-2-4x+4-3y=0\Rightarrow -x-7y+4z-3=0$$

Entonces un vector normal es $\vec{v}(-1,-7,4)$

---

## 43. Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi\equiv x-2y+z+2=0$ y pasa por el punto P(1, 1, -3).

Si la recta es perpendicular al plano, el vector normal de éste será el de dirección de aquélla, es decir, la recta será en paramétricas:

$$r:\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t\\ z=-3+t\end{cases}$$

---

## 44. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 0, 2) y es paralela a los planos:

$$\pi: x-2y+3z+1=0 \quad \text{y} \quad \pi': 2x-3y+z+6=0$$

Los planos dados son secantes y se cortan en una recta pues el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(B) = 2$$

Si la recta buscada es paralela a ambos planos lo será necesariamente a la recta intersección de los mismos, es decir a la recta:

$$r : \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 6 = 0 \end{cases}$$

Su dirección será la determinada por el vector producto vectorial de los vectores normales a los planos dados, esto es:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} + 4\vec{k} + 3\vec{i} - \vec{j} = \vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (1,5,1)$$

Y la recta pedida será:

$$r' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

---

## 45. Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular a la recta determinada por los puntos A(2,0,4) y B(8, 1, 6).

La recta que pasa por A y B es, tomando como punto base el A y como vector director $\overrightarrow{AB}(6,1,2)$, en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

El vector normal al plano será el director de la recta, es decir, el plano es de la forma:

$$\pi : 6x + y + 2z + k = 0$$

Y como P ha de pertenecer a él:

$$6 + 1 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -9$$

siendo el plano pedido:

$$\pi : 6x + y + 2z - 9 = 0$$

---

## 46. Determinar las coordenadas del punto A' simétrico del A(2,2,1) respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$

El plano ha de cortar al segmento AA' en su punto medio y ser perpendicular a él.

La recta que pasando por A es perpendicular al plano es:

$$r:\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Dicha recta se corta con el plano en el punto M solución de:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z + 6 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + t - 2(2 - 2t) + 1 + t + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2 + t - 4 + 4t + 1 + t + 6 = 0 \Rightarrow 6t = -5 \Rightarrow t = -\frac{5}{6}$$

Entonces:

$$M\left(2 - \frac{5}{6}, 2 + \frac{5}{3}, 1 - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, \frac{11}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Y este punto es el punto medio del segmento AA', es decir, si a las coordenadas de A' las llamamos (a, b, c), se tiene que:

$$\frac{2 + a}{2} = \frac{7}{6} \Rightarrow 12 + 6a = 14 \Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2 + b}{2} = \frac{11}{3} \Rightarrow 6 + 3b = 22 \Rightarrow 3b = 16 \Rightarrow b = \frac{16}{3}$$

$$\frac{1 + c}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6 + 6c = 2 \Rightarrow 6c = -4 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$$

Y el punto A' es $A'\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

---

**47. Determinar las coordenadas del punto A', simétrico del A(2, 0, 3) respecto a la recta:**

$$r: \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{2}$$

Determinemos el plano que pasa por A y es perpendicular a r, éste será con vector normal (1, 1, 2):

$$\pi : x + y + 2z + k = 0$$

Y para el punto A:

$$2 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

siendo $\pi : x + y + 2z - 8 = 0$

Pongamos la recta r en forma implícita:

$$r:\begin{cases} x - 1 = y - 2 \\ 2x - 2 = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

El plano y la recta se cortarán en las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=-1 \\ 2x-z=1 \\ x+y+2z=8 \end{array}\right\}$$

Que por Crámer da:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1+1+4=6$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8-1+2=9$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}=2+1+8+4=15$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}=-1-2-1+16=12$$

$$x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

$$z=\frac{12}{6}=2$$

El punto obtenido es el punto medio del segmento AA’, por tanto, siendo (a, b, c) las coordenadas de A’:

$$\frac{2+a}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4+2a=6\Rightarrow a=1$$

$$\frac{b}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow b=5$$

$$\frac{3+c}{2}=2\Rightarrow 3+c=4\Rightarrow c=1$$

Y el punto A’ es $A'(1,5,1)$

---

**48. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(0, 1, 3) y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z-4=0$**

Sea el plano buscado de la forma $\pi': x+Ay+Bz+C=0$, para los puntos A y B obtenemos:

$$2+A+C=0$$

$$A+3B+C=0$$

Además por ser perpendicular al plano dado, el vector (1, A, B) y el vector (2, -1, 1) han de ser ortogonales, es decir:

$$2 - A + B = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A + C = -2 \\ A + 3B + C = 0 \\ -A + B = -2 \end{array}\right\}$$

Se tiene, por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$C = -\frac{14}{3}$$

$$-3B = -2 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$A + C = -2 \Rightarrow A = -2 - C = -2 + \frac{14}{3} = \frac{8}{3}$$

Y el plano pedido es:

$$\pi' : x + \frac{8}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{14}{3} = 0 \Rightarrow 3x + 8y + 2z - 14 = 0$$

---

**49. Determinar el ángulo que forman el plano $\pi : 5x + 4y - 2z + 5 = 0$ y la recta:**

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

En ángulo buscado, y al que llamaremos $\alpha$, será el complementario del que forman el vector director de la recta $\vec{u}(2,3,4)$ y el vector normal al plano $\vec{n}(5,4,-2)$ dado que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario se tendrá:

$$\cos(90 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{10 + 12 - 8}{\sqrt{4 + 9 + 16}\sqrt{25 + 16 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{29}\sqrt{45}} =$$

$$= \frac{14}{\sqrt{1305}} \approx 0{,}3875$$

Finalmente se tiene para el ángulo buscado:

$\alpha = \text{arcsen}(0{,}3875) = 22º47'56''$

**50. Hallar la distancia del punto P(2, 4, 1) al plano:**

$$\pi : 3x + 4y + 12z - 7 = 0$$

Se tiene:

$$d(P,\pi) = \frac{6+16+12-7}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{27}{\sqrt{169}} = \frac{27}{13}$$

**51. Hallar la distancia entre los planos paralelos:**

$$\pi : 3x + y + z - 3 = 0 \text{ y } \pi' : 3x + y - z - 8 = 0$$

La distancia entre dos planos paralelos es la diferencia de distancias de ambos planos al origen de coordenadas, esto es:

$$d(\pi,\pi') = \frac{|-3+8|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

**52. Comprobar que la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{-1}$ es paralela al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 0$ y hallar la distancia de la recta al plano.**

La recta será paralela al plano si el vector director de aquélla es ortogonal al vector normal al plano esto es si:

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 0$, cosa que efectivamente ocurre.

La distancia de la recta al plano será la misma que la distancia entre un punto de la recta y el plano. tomando como punto de la recta el punto base A(3, 2, 7), se tendrá:

$$d(\pi,r) = \frac{3+4+21}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = \frac{28\sqrt{14}}{14} = 2\sqrt{14}$$

**53. Probar que las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y &= 0 \\ X+Z &= 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 4 \end{cases}$ se cruzan y hallar la mínima distancia entre ellas.**

Al tratar de resolver el sistema:

$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\}$, el menor de los coeficientes $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

pero el menor de la matriz ampliada es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 4$$

El sistema es incompatible y las rectas se cruzan en el espacio.

La mínima distancia entre ellas será la que haya entre el punto A de la 1ª y el B de la 2ª intersecciones respectivas de ambas rectas con la perpendicular común a ambas. Determinemos estos puntos, para lo cual pasaremos las rectas dadas a la forma paramétrica. Haciendo $z = \lambda$ en la primera y $z = \mu$ en la segunda queda:

$$r_1 : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = \mu \end{cases}$$

Por lo tanto un punto genérico de la 1ª será $P(-\lambda, 0, \lambda)$ y uno genérico de la 2ª $Q(0,4,\mu)$, la distancia entre P y Q será mínima cuando el vector $\vec{PQ}(\lambda, 4, \mu - \lambda)$ y los vectores directores de ambas rectas $\vec{u}(-1,0,1)$ y $\vec{v}(0,0,1)$ sean ortogonales, es decir:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -\lambda + \mu - \lambda = 0 \Rightarrow -2\lambda + \mu = 0$$
$$\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \mu - \lambda = 0$$

resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas determinado por estas dos últimas igualdades obtenemos fácilmente que:

$$-2\mu + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 = \lambda$$

Por lo que los puntos A y B de las respectivas rectas más próximos entre si son A(0,0,0) y B(0,4,0).

Siendo la distancia entra A y B la distancia pedida, dicha distancia es:

$$d(A,B) = \sqrt{4} = 2$$

---

**54. Determinar m para que el vector $\vec{u}(2, m+1, m)$ sea ortogonal al vector normal al plano:**

$$\pi : \begin{cases} x = 5 + 3t - 2s \\ y = t - s \\ z = -1 - t - 4s \end{cases}$$

Pasemos la ecuación del plano a la forma general para determinar su vector normal:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 3 & -2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-5) - 3(z+1) + 2y + 2(z+1) - (x-5) + 12y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 20 - 3z - 3 + 2y + 2z + 2 - x + 5 + 12y = 0 \Rightarrow -5x + 14y - z + 24 = 0$$

Siendo entonces el vector normal al plano $\vec{n}(-5,14,-1)$ y para que ese vector sea ortogonal al dado, se ha de cumplir:

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow -10+14(m+1)-m=0 \Rightarrow -10+14m+14-m=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13m=-4 \Rightarrow m=-\frac{4}{13}$$

---

## 55. Dados los puntos *A*(1, 0, 0), B(0, 1, 0) y *C*(0, 0, 1):

**a) Demostrar que no están alineados y por lo tanto determinan un triángulo.**
**b) Determinar las ecuaciones de las alturas del triángulo ABC**
**c) Determinar las ecuaciones de las mediatrices.**
**d) Determinar las coordenadas del cincuncentro.**
**e) Calcular las longitudes de las alturas del triángulo.**

a) Los puntos dados están cada uno sobre uno de los ejes coordenados y por tanto no pueden estar alineados.
b) Las alturas de un triángulo son los segmentos de recta comprendidos entre un vértice y el punto donde la perpendicular trazada por dicho vértice al lado opuesto corta a dicho lado opuesto.

Las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC son:

recta AB:

$$r_1: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

recta AC:

$$r_2: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

recta BC:

$$r_3: \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Las rectas que contienen a las alturas serán, respectivamente $h_a$ la recta que pasa por A y es perpendicular a BC; la recta $h_b$ que pasa por B y es perpendicular a AC, y la recta $h_c$ que pasa por C y es perpendicular a AB

**Determinación de $h_a$:**

Un vector director de $h_a$ habrá de ser ortogonal a (0, -1, 1), sea este vector (a, b, c), se tendrá que:

$-b+c=0 \Rightarrow c=b$, con lo que podemos tomar (0, 1, 1) y la altura $h_a$ será:

$$h_a: \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

**Determinación de $h_b$:**

Un vector director de $h_b$ de la forma (a, b, c) habrá de ser ortogonal a (-1, 0, 1), es decir:

$-a+c=0 \Rightarrow c=a$, tomemos (1, 0, 1) y tendremos:

$$h_b : \begin{cases} x=\mu \\ y=1 \\ z=\mu \end{cases}$$

**Determinación de $h_c$:**

Un razonamiento análogo nos conduce a:

$$h_c : \begin{cases} x=\sigma \\ y=\sigma \\ z=1 \end{cases}$$

Que son las ecuaciones de las alturas pedidas.

c) Las mediatrices son las rectas perpendiculares a cada lado por su punto medio. Teniendo en cuenta los vectores directores de cualquier recta perpendicular a un lado obtenidos en el apartado anterior, es decir (0, 1, 1), (1, 0, 1) y (1, 1, 0) respectivamente bastará obtener los puntos medios de cada lado:

Punto medio de AB: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, punto medio de AC: $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ y punto medio de BC: $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Las mediatrices serán:

$$m_a : \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\frac{1}{2}+\lambda \end{cases}$$

$$m_b : \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\mu \\ y=0 \\ z=\frac{1}{2}+\mu \end{cases}$$

$$m_c : \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\sigma \\ y=\frac{1}{2}+\sigma \\ z=0 \end{cases}$$

d) El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices (basta con encontrar el punto de intersección de dos de ellas pues la 3ª pasará seguro por él).

Para la intersección de $m_a$ y $m_b$ , resolveremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0=\frac{1}{2}+\mu \\ \frac{1}{2}+\lambda=0 \\ \frac{1}{2}+\lambda=\frac{1}{2}+\mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-\frac{1}{2} \\ \lambda=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Y para esos valores (sustituyendo en $m_a$ por ejemplo):

El circuncentro es $(0,0,0)$, es decir, el origen de coordenadas.

e) Las longitudes de las alturas son respectivamente las distancias de A a $r_3$ , de B a $r_2$ y de C a $r_1$. Es decir:

Un vector director de $r_1$ es $v_1(-1, 1, 0)$ y un punto de ella es (1, 0, 0)
Un vector director de $r_2$ es $v_2(-1, 0, 1)$ y un punto de ella es (0, 1, 0)
Un vector director de $r_3$ es $v_3(0, -1, 1)$ y un punto de ella es (0, 0, 1)

Los productos vectoriales son:

$$\vec{AC}\times\vec{v}_3=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=i+j+k=(1,1,1)$$

$$\vec{BA}\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-i-j-k=(-1,-1,-1)$$

$$\vec{CA}\times\vec{v}_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=i+j+k=(1,1,1)$$

Las longitudes de las alturas son:

$$h_a=d(A,r_3)=\frac{\left|\vec{AC}\times\vec{v}_3\right|}{\left|\vec{v}_3\right|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}=h_b=h_c$$

Ya que el triángulo es equilátero.

---

**56. Hallar la ecuación del plano que sea perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$ y diste $\sqrt{5}$ unidades del punto P(4, 3, 1).**

El vector de dirección de la recta ha de ser el normal al plano. Pasemos la recta a paramétricas haciendo z=t:

$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

Un vector director suyo es $\vec{u}(0,2,1)$. El plano buscado será de la forma:

$$\pi: 2y+z+k=0$$

La distancia de P a dicho plano es:

$$d(P,\pi)=\frac{6+1+k}{\sqrt{4+1}}=\frac{7+k}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow 7+k=5\Rightarrow k=-2$$

Y el plano pedido es:

$$\pi: 2y+z-2=0$$

---

## 57. Demostrar si los puntos A(0, 1, -2), B(1, 0, -5), C(1, 1, -4) y D(2, -1, -8) determinan un cuadrilátero.

Los puntos dados determinarán un cuadrilátero si dos de los puntos dados (p. ej. C y D) no pertenecen a la recta determinada por A y B. Dicha recta es:

$$\vec{AB}(1,-1,-3)$$

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$$

Sustituyamos las coordenadas de C y D y veamos si en cada caso son iguales o diferentes, en las tres ecuaciones paramétricas, los valores del parámetro:

**Para C:**

$$\left.\begin{array}{l} 1=\lambda \\ 1=1-\lambda \\ -4=-2-3\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=0 \\ \lambda=\dfrac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow C\notin r$$

**Para D:**

$$\left.\begin{array}{l} 2=\lambda \\ -1=1-\lambda \\ -8=-2-3\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=2 \\ \lambda=2 \end{cases}\Rightarrow D\in r$$

Es decir, los puntos A, B y D están alineados pero C no. Los puntos dados no pueden determinar un cuadrilátero.

---

## 58. Determinar los puntos de corte del plano $\pi\equiv 3x-2y+z=6$ con los ejes de coordenadas y calcular el área del triángulo que dichos puntos definen.

Corte con el eje OX (hacemos y=z=0):

$$x=\frac{6}{3}=2$$

corta a OX en A(2, 0, 0)

Corte con el eje OY (hacemos x=z=0):

$$-2y=6\Rightarrow y=-3$$

corta al eje OY en B(0, -3, 0)

Corte con el eje OZ (hacemos x=y=0):

$$z = 6$$ corta al eje OZ en C(0, 0, 6)

El área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ y el área de éste es el módulo del producto vectorial de ambos, es decir:

$$A = \frac{\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|}{2}$$

El producto vectorial es:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18i + 12j - 6k = (-18,12,-6)$$

Y su módulo:

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{324 + 144 + 36} = \sqrt{504}$$

El área del triángulo es, pues:

$$A = \frac{\sqrt{504}}{2} \quad u^2$$

---

## 59. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el punto V(1, 1, 1) y los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 12 = 0$, con los ejes de coordenadas.

Procediendo como en el ejercicio anterior, los puntos de corte del plano con los ejes son A(6, 0, 0), B(0, 4, 0) y C(0, 0, 12).

Como el valor absoluto del producto mixto de tres vectores representa el volumen del paralelepípedo delimitado por ellos y el volumen del tetraedro es la sexta parte de dicho paralelepípedo, se tiene:

$$\vec{a} = \vec{AV}(-5,1,1)$$
$$\vec{b} = \vec{AB}(-6,4,0)$$
$$\vec{c} = \vec{AC}(-6,0,12)$$

El producto mixto de ellos es:

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -240 + 24 + 72 = -144$$

El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{144}{6} = 24 \quad u^3$$

---

**60. El plano $\pi \equiv x + y + z = 4$ es el plano mediador de un segmento, uno de cuyos extremos es el punto A(1, 0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**

Se trata de encontrar el punto A'(a, b, c) simétrico del A respecto al plano. La recta que pasando por A es perpendicular al plano es (su vector director es el normal del plano):

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=y \\ x-1=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-z=1 \end{cases}$$

El punto donde se cortan esta recta y el plano es la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ x-y=1 \\ x-z=1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$3z = 3 \Rightarrow z = 1$$
$$2y + z = 3 \Rightarrow 2y = 3 - z = 3 - 1 = 2 \Rightarrow y = 1$$
$$x + y + z = 4 \Rightarrow x = 4 - y - z = 4 - 1 - 1 = 2$$

El punto M(2, 1, 1) es el punto medio del segmento AA', se tiene pues:

$$\frac{1+a}{2} = 2 \Rightarrow a = 3$$
$$\frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2$$
$$\frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

Y el punto A' es (3, 2, 2)

---

*Ejercicios recogidos de la página web:*
*http://usuarios.lycos.es/manuelnando/practicageometriaespacio.htm*