

# GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO

## PRODUCTO ESCALAR

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos x \quad (\text{Cuando sepamos el ángulo que forman } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} (x)).$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \quad (\text{Cuando sepamos las coordenadas de } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} ).$$

Cuando los vectores son perpendiculares su producto escalar será 0 (Cero)( $\cos 90 = 0$ ).

## PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores  $\vec{u} = (x, y, z)$  y  $\vec{v} = (x', y', z')$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

(El vector que resulta de este determinante es **perpendicular** a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , y su módulo coincide con el **ÁREA DEL PARALELOGRAMO** que forman  $u$  y  $v$ ).

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen} \alpha \quad (\alpha \text{ es el ángulo que forman } \vec{u} \text{ y } \vec{v}.)$$

## COORDENADAS DE UN VECTOR LIBRE

Dados los puntos  $A(a, b, c)$  y  $B(d, e, f)$  el vector con origen en  $A$  y extremo en  $B$  se calcula restando  $B - A$   $\vec{AB} = B - A$

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO. Para hallar la ecuación de una recta es necesario conocer UN PUNTO Y EL VECTOR DIRECTOR de la misma.

Una recta, [obtenida a partir de un PUNTO  $(x_0, y_0, z_0)$  y un VECTOR  $(v_1, v_2, v_3)$  ], se puede expresar de las siguientes formas:

1.- ECUACIÓN VECTORIAL:  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$

2.- ECUACIONES PARAMÉTRICAS :  $\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$

3.- ECUACIÓN CONTINUA:  $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$

#### 4.- EC. GENERAL DE LA RECTA

$$\text{(Intersección de dos planos): } \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases}$$

*NOTA:* Para hallar el **vector** de una recta expresada como intersección de dos planos basta con hacer el producto vectorial  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Siendo  $\vec{a} = (A, B, C)$  y  $\vec{b} = (A', B', C')$ .

Para hallar un **punto** sólo hay que darle a 'x', a 'y' o a 'z' un valor arbitrario, sustituirlo en el sistema y despejar las otras dos incógnitas.

**ECUACIONES DEL PLANO** Para hallar la ecuación de un plano es necesario conocer UN PUNTO Y DOS VECTORES DIRECTORES del mismo.

Un plano, [Obtenido a partir de un PUNTO  $(x_0, y_0, z_0)$  y DOS VECTORES  $\vec{V} (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{W} (w_1, w_2, w_3)$ ], se puede expresar de las siguientes formas:

1.- ECUACIÓN VECTORIAL:  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3)$

2.- ECUACIONES PARAMÉTRICAS  $\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 + s \cdot w_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 + s \cdot w_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 + s \cdot w_3 \end{cases}$

3.- ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA:  $Ax + By + Cz + D = 0$

*NOTA:* Para hallarla sólo hay que realizar este determinante e igualarlo a cero:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

4.- ECUACIÓN SEGMENTARIA:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Los valores  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  se denominan, respectivamente, abscisa, ordenada, y cota en el origen.

#### 5.- OTRA FORMA DE HALLAR LA ECUACIÓN DE UN PLANO:

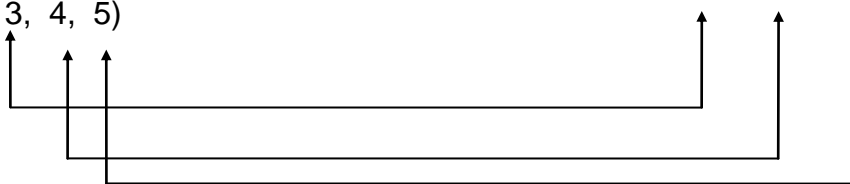
Un plano también se puede hallar sabiendo **UN PUNTO Y SÓLO UN VECTOR**, siempre y cuando ese vector sea **perpendicular al plano** (llamado vector normal), las coordenadas de ese vector coinciden con los coeficientes **(A, B, C)** del plano:

para hallar el término independiente ( **D** ) del plano, sólo hay que sustituir las coordenadas del punto que nos den y despejar **D**.

Ej/.

Vector normal ( 3, 4, 5)

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$



## POSICIONES RELATIVAS.

### Posición relativa de DOS PLANOS.

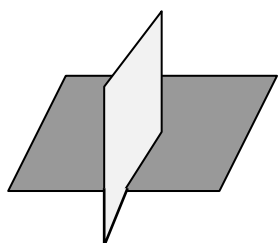
$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

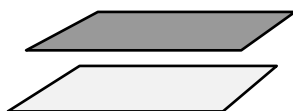
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

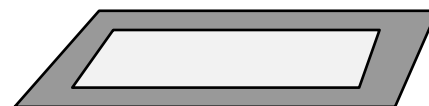
	Rango de M	Rango de M*	Posición de <u>DOS PLANOS</u>
Caso 1	2	2	Planos <b>secantes</b>
Caso 2	1	2	Planos <b>paralelos</b> y distintos
Caso 3	1	1	Planos <b>coincidentes</b>



secantes



paralelos



coincidentes

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

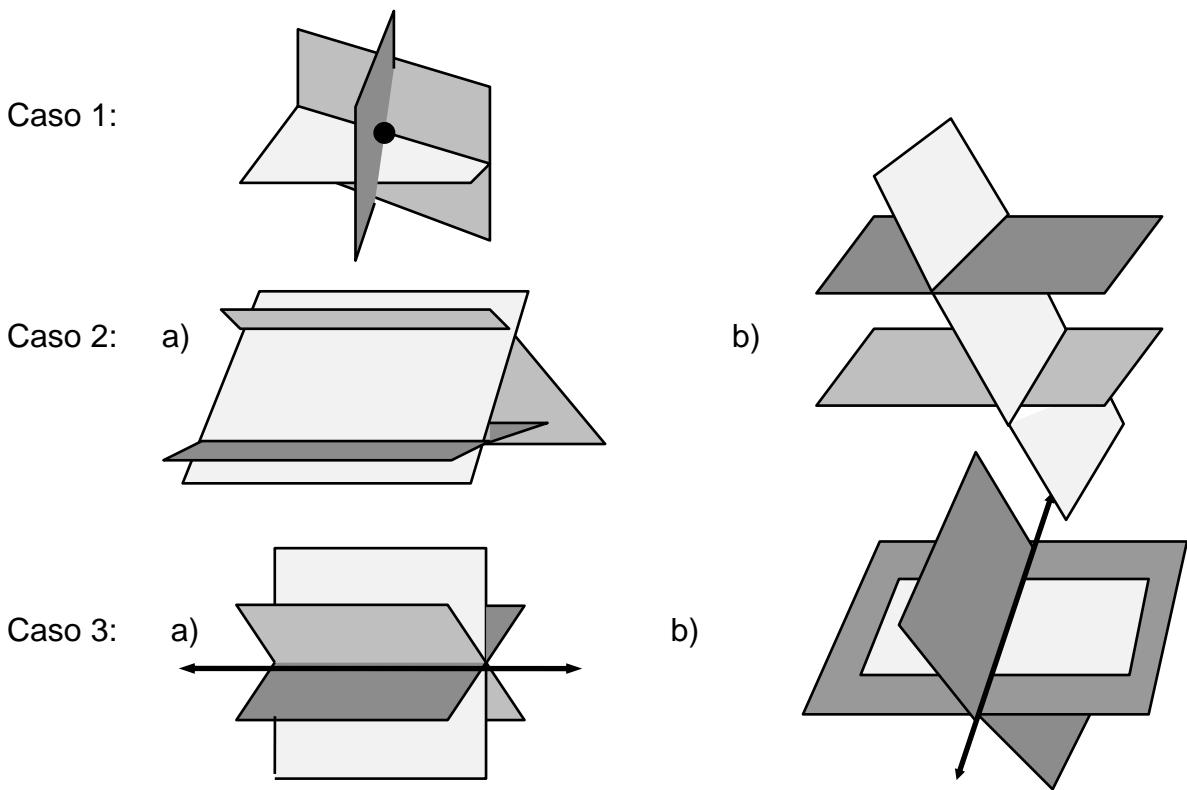
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

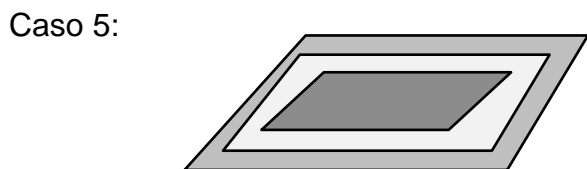
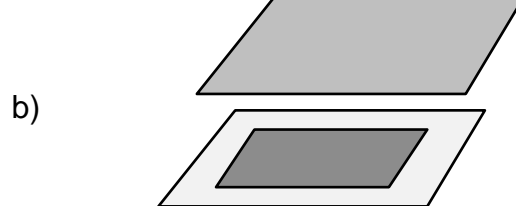
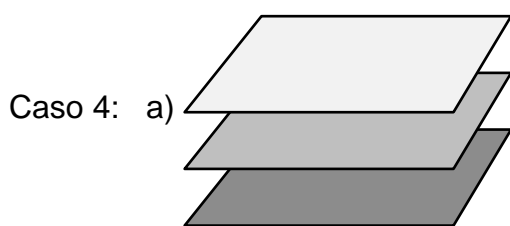
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Posición relativa de TRES PLANOS

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \pi: A x + B y + C z + D = 0 \\ \pi': A' x + B' y + C' z + D' = 0 \\ \pi'': A'' x + B'' y + C'' z + D'' = 0 \end{array}$$

	Rango de M	Rango de M*	Posición de <u>TRES PLANOS</u>
<b>Caso 1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	Planos <b>secantes en un punto</b> .
<b>Caso 2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	a) Planos <b>secantes dos a dos</b> forman una superficie prismática. <b>(3 SEC)</b> b) <b>Dos</b> planos <b>paralelos</b> cortados por el otro. <b>(2 PARAL. y 1 SEC)</b>
<b>Caso 3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	a) Plano <b>distintos</b> y se cortan en una recta. <b>(3 SEC)</b> b) <b>Dos coincidentes</b> y el otro los corta. <b>(2 COINC. y 1 SEC.)</b>
<b>Caso 4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	a) Planos <b>paralelos</b> y distintos <b>dos a dos</b> . <b>(3 PARAL.)</b> b) <b>Dos</b> son <b>coincidentes</b> y el otro <b>paralelo</b> a ellos y <b>distinto</b> . <b>(2 COINC. y 1 PARAL.)</b>
<b>Caso 5</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	Planos <b>coincidentes</b> .





Posición relativa de PLANO Y RECTA

Si la recta nos la dan de la forma general:  $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

Y el plano de la siguiente forma  $\alpha \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$   $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$  Entonces se estudian los rangos de  $M$  y  $M^*$ :

	Rango de $M$	Rango de $M^*$	Posición de recta y plano	Gráficamente
Caso 1	3	3	Recta y plano secantes	
Caso 2	2	3	Recta y plan paralelos	
Caso 3	2	2	Recta contenida en el plano	

## Posición relativa DE DOS RECTAS

Dadas dos rectas  $r$  y  $s$  por sus ecuaciones generales:

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Se estudian los rangos de  $M$  y  $M^*$ :

	Rango de $M$	Rango de $M^*$	Posición de <u>DOS RECTAS</u>
<b>Caso 1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	rectas <b>cruzadas</b>
<b>Caso 2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	rectas <b>secantes</b>
<b>Caso 3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	rectas <b>paralelas</b>
<b>Caso 4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	rectas <b>coincidentes</b>

Dadas dos rectas  $r$  y  $s$ , de las que conocemos el vector director y un punto de cada una:

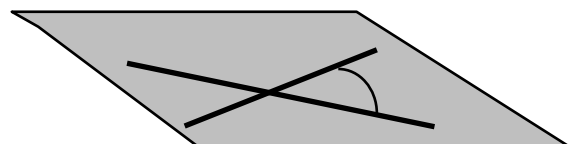
**VECTORES**  $\vec{V}(v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{W}(w_1, w_2, w_3)$  y **PUNTOS**  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$

$M = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$		Rango de $M$	Rango de $M^*$	Posición de <u>DOS RECTAS</u>
$M = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \end{pmatrix}$	<b>Caso 1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	rectas <b>cruzadas</b>
	<b>Caso 2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	rectas <b>secantes</b>
	<b>Caso 3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	rectas <b>paralelas</b>
	<b>Caso 4</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	rectas <b>coincidentes</b>

## Ángulo de DOS RECTAS:

Sean  $u$  y  $v$  los vectores de dos rectas  $r$  y  $s$ .

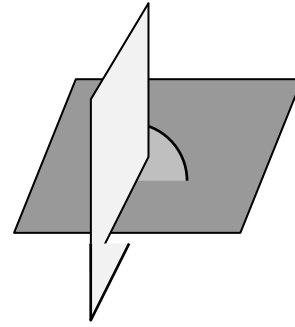
$$\cos x = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



**Ángulo entre DOS PLANOS:**

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  los vectores **normales** de dos planos  $\pi$  y  $\pi'$

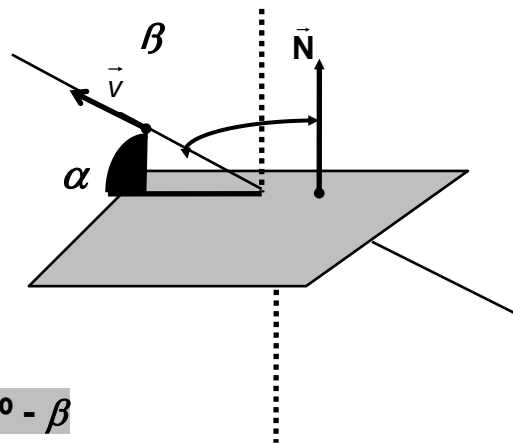
$$\cos x = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



**Ángulo entre PLANO Y RECTA.**

Sea  $\vec{N}$  el vector normal del plano  
 $\vec{v}$  el vector director de la recta.

$$\cos \beta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{v}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{v}|}$$



El ángulo que hay que hallar **NO**  
 es  $\beta$  sino  $\alpha$  que se calcula:  $\alpha = 90^\circ - \beta$

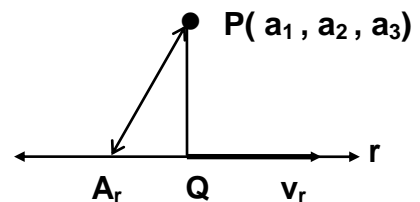
**Distancia ENTRE DOS PUNTOS**

$A(a_1, a_2, a_3)$  —————  $B(b_1, b_2, b_3)$       $d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

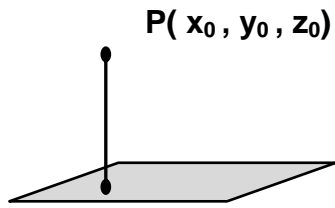
La distancia entre A y B es el módulo del vector que los une.

**Distancia DE UN PUNTO A UNA RECTA**

$$d(P, r) = \frac{|A_r \vec{P} \times \vec{V}_r|}{|\vec{V}_r|}$$



## Distancia DE UN PUNTO A UN PLANO



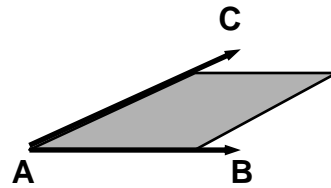
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

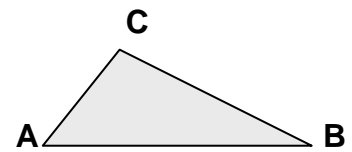
## VOLUMENES Y ÁREAS

ÁREA DEL

PARALELOGRAMO:  $S(ABC) = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

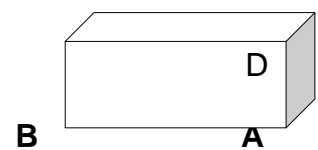


ÁREA DEL TRIANGULO:  $S(ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

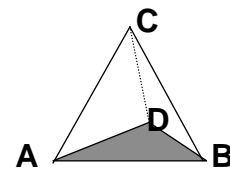


VOLUMEN DEL

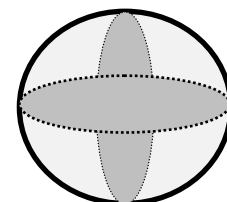
PARALELEPÍPEDO:  $V = |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$



VOLUMEN DEL TETRAEDRO:  $V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$



SUPERFICIE ESFÉRICA:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$





## CÁLCULO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Llamamos **bisectriz**,  $b$ , del ángulo que forman las rectas  $r$  y  $r'$  a la recta que divide a dicho ángulo en dos partes iguales.

Hay que observar que **son dos** las bisectrices que podemos trazar, para hallarlas utilizaremos los vectores directores de las rectas  $r$  y  $r'$ .

Sean  $r$  y  $r'$  dos rectas secantes en un punto  $P$ , con vectores directores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es decir:

$$r: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} \quad \text{y} \quad r': \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}$$

- Si los vectores directores de las rectas tuviesen el mismo módulo, al sumarlos formaríamos un rombo, en el cual el vector suma y el vector diferencia serían las diagonales mayor y menor, respectivamente. En este caso, las diagonales del rombo son las bisectrices de los ángulos interiores, por tener los cuatro lados iguales y sus ángulos iguales dos a dos.
- Si los vectores no tienen el mismo módulo, normalizándolos obtenemos vectores directores de las rectas de módulo uno, y los vectores directores de las bisectrices serían el vector suma y el vector diferencia de los normalizados. Por tanto, las ecuaciones de sus bisectrices serán:

$$b_1: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot (\vec{u}' + \vec{v}') \quad \text{y} \quad b_2: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot (\vec{u}' - \vec{v}')$$

siendo  $\vec{u}'$  y  $\vec{v}'$  los vectores unitarios de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

### Ejemplo

Vamos a hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{y} \quad s: (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 0, 0). \quad \text{Con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si hallamos la posición relativa de las rectas, obtenemos que se cortan en el punto  $P(2, 2, -1)$ . Sea  $\vec{u} = (1, 2, -2)$  el vector director de  $r$  de módulo  $|\vec{u}| = 3$  y  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  el vector director de  $s$ , de módulo  $|\vec{v}| = 1$ .

Normalizando  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , obtenemos  $\vec{u}' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  y  $\vec{v}' = (1, 0, 0)$ : luego las ecuaciones de las bisectrices son:

$$b_1: (x, y, z) = (2, 2, -1) + \lambda \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad b_2: (x, y, z) = (2, 2, -1) + \mu \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

## Problemas geométricos. Procedimientos analíticos

### - Haz de planos

Sea la recta de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Al conjunto de planos que contienen la recta "r" se le llama **Haz de Planos**, y cualquier plano del haz tiene por ecuación:

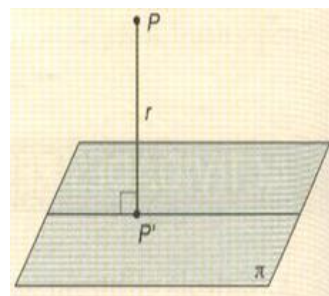
$$t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

### - Proyección de un punto sobre un plano

Cuando se proyecta perpendicularmente un punto "P" sobre un plano " $\pi$ " se obtiene un punto del mismo que coincide con la intersección de dicho plano con la recta perpendicular a este y que pasa por el punto dado.

Procedimiento analítico:

- Hallamos la recta "r" que pasa por "P" y es perpendicular a " $\pi$ ".
- Hallamos la intersección de "r" con " $\pi$ " y obtenemos el punto proyección "P'".

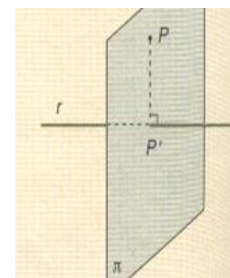


### - Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto (P) sobre una recta (r) es el punto (P') de intersección de la recta con el plano ( $\pi$ ) perpendicular a ella y que pasa por el punto.

Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano  $\pi$  perpendicular a r y que pasa por P.
- Hallamos la intersección de  $\pi$  con r y obtenemos el punto pedido, que es el punto proyección P'.

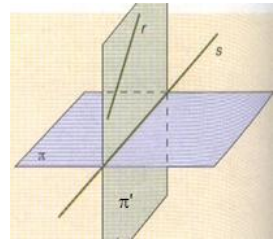


## - Proyección de una recta sobre un plano

La proyección de una recta sobre un plano es otra recta, que evidentemente estará contenida en el plano dado.

Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .
- La recta proyección  $s$  de  $r$  sobre  $\pi$  es la intersección de  $\pi$  y  $\pi'$



## - Elementos Simétricos

### - Simétrico de un punto respecto de un plano

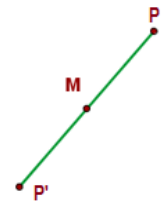
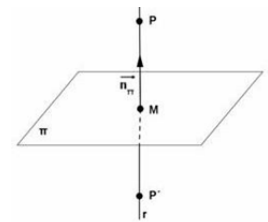
El simétrico de un punto  $P$  respecto de un plano  $\pi$  es el punto  $P'$  que se encuentra en la perpendicular trazada desde  $P$  al plano, de modo que  $P$  y  $P'$  equidistan del plano.

Procedimiento analítico:

- Hallamos el punto  $M$  proyección del punto  $P$  sobre el plano  $\pi$ .
- Calculamos el punto  $P'$  teniendo en cuenta que  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$

**Nota:** Sean  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P'(x_2, y_2, z_2)$  y  $M(x_m, y_m, z_m)$  donde  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$  se verifica que:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

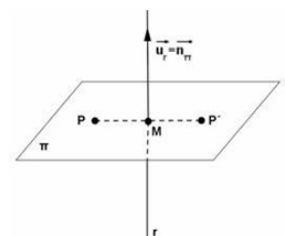


### - Simétrico de un punto respecto de una recta

El simétrico de un punto  $P$  respecto de una recta  $r$  es el punto  $P'$  que se encuentra en la perpendicular trazada desde  $P$  a la recta, de modo que  $P$  y  $P'$  equidistan de la recta.

Procedimiento analítico:

- Hallamos el punto  $M$  proyección del punto  $P$  sobre la recta  $r$ .
- Calculamos el punto  $P'$  teniendo en cuenta que  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$



- **Recta que se apoya en dos y pasa por un punto**

La recta  $s$  que se apoya en dos rectas  $r_1$  y  $r_2$  dadas y que pasa por un punto  $P$  dado es la recta que corta ambas y pasa por  $P$ .

Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano  $\pi_1$  que contiene a  $r_1$  y a  $P$ .
- Hallamos el plano  $\pi_2$  que contiene a  $r_2$  y a  $P$ .
- La intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  es la recta  $s$  buscada.



- **Recta que se apoya en dos y es paralela a una dada**

La recta  $s$  que se apoya en dos rectas  $r_1$  y  $r_2$  dadas y que es paralela a la recta  $r$  dada es la recta que corta a ambas y es paralela a  $r$ .

Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano  $\pi_1$  que contiene a  $r_1$  y a  $v_r$ .
- Hallamos el plano  $\pi_2$  que contiene a  $r_2$  y a  $v_r$ .
- La intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  es la recta  $s$  buscada.

- **Distancia entre dos rectas que se cruzan**

Para hallar la distancia entre dos rectas  $r_1$  y  $r_2$  que se cruzan aplicamos el siguiente procedimiento analítico:

- Hallamos el plano  $\pi$  que contiene a una de la recta ( $r_1$ ) y es paralelo a la otra ( $r_2$ ).
- La distancias entre ambas rectas es igual a la distancia entre un punto de la recta  $r_2$  y el plano  $\pi$

